Ekonometri 2
Ders Notları

A. TALHA YALTA

TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ
AÇIK DERS MALZEMELERİ PROJESİ

SÜRÜM 2.0
EKİM 2011

Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011

İçindekiler

Önsöz

Bu ekonometri ders notları uzun ve titiz bir çalışmanın ürünüdür. Aynı zamanda, uzun bir süredir içinde yer aldığım açık kaynak hareketinin önemine olan inancımın göstergesi ve bu oluşuma verdiğim desteğin bir parçasıdır. Ders notlarımı ekonometri öğrenmeyi ve öğretmeyi arzulayan herkesin açık ve özgür kullanımına mutlulukla sunuyorum. Yararlanacak kişiler için; var olan malzemenin kapsamı, sayfa düzeni ve kullandığı terminoloji ile ilgili birkaç bilginin açıklayıcı olacağını düşünüyorum.

Notların İçeriği

- Ders notları TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'nde 2007 yılından bu yana vermiş olduğum Ekonometri 1 ve Ekonometri 2 derslerinden ortaya çıkmıştır.
- Notlar, genel olarak, önceki bir baskısı Ümit Şenesen ve Gülay Günlük Şenesen tarafından Türkçe'ye de çevrilmiş olan Gujarati ve Porter'ın Basic Econometrics ders kitabı konu sırasını izlemektedir.
- Tüm görsel öğeler tarafımdan Türkçe'ye kazandırılmış olan gretl (GNU Regression, Econometrics and Time-series Library) ekonometri yazılımı kullanılarak oluşturulmuştur.
- Notlarda yer alan çözümleme ve örneklerin tamama yakını Türkiye'yi konu almakta, Türkiye verilerini kullanmaktadır.
- Bu özgün veri setleri ders notlarını tamamlayıcıdır ve gretl gdt ve csv dosyası olarak iki ayrı biçimde ekte verilmiştir.

Sayfa Düzeni

- Tüm konu anlatımları yatay düzende ve sunum biçiminde hazırlanmıştır. Bunun nedeni, öğrenmeyi özendiren çekici bir yaklaşım benimsemek ve notların bilgisayar ekranında okunabilmesini kolaylaştırmaktır.

- Benimsemiş olduğum yöntemin çizim, çizelge, ve tahmin çıktıları gibi görsel öğelere dayalı uygulamalı bir bilim olan ekonometriyi öğretmede elverişli olduğunu düşünüyorum.
- A4 düzenine getirildiğinde, her bir konu ortalama 15 - 20 sayfa tutmaktadır. Bu şekilde hazırlanmış olan bir "kitap" sürümü de ilgilenenler için ayrıca sunulmaktadır.
- Konu anlatımlarının yanı sıra, ikişer takım sınav soru ve yanıtları da açık ders malzemeleri içinde yer almaktadır. Bu ek belgeler de A4 sayfa boyutundadır.

Kullanılan Terminoloji

- Türkçe terimler konusunda çeşitli akademisyenlerin değerli katkıları bulunmakla birlikte, yerleşmiş ve kendi içerisinde tutarlı bir ekonometrik terminolojinin eksikliği bir gerçektir.
- Ders notlarında kullanılan Türkçe konusunda büyük titizlik gösterilmiş ve çeşitli ekonometri kaynakları taranarak daha önce farklı yazarlarca önerilmiş karşılıklara dayalı, anlam ve dilbilgisi yönünden doğru bir terimler seti hazırlanmıştır. Bu konuda yerli ve yabancı dilbilimci ve ekonometricilerden de sıkça yardım alınmıştır.
- Çeşitli ekonometrik terimlerin İngilizce karşılıklarının metin içerisinde düzenli olarak verilmesi, notlarının bir özelliğidir.
- İki sözcükten oluşan ancak tek bir kavrama karşılık gelen ve terim özelliği gösteren sözcüklerin bitişik yazılması ise bilinçli bir seçimdir. (*Örnek:* Bandwidth = Kuşakgenişliği)

Terminolojide Yararlanılan Kaynaklar

Ders notlarında kullanılan terminolojide yararlanılan başlıca kaynaklar şunlardır:

- Akalın H. vd., *TDK Ekonometri Sözlüğü*, http://www.emu.edu.tr/mbalcilar/eets/Ana_Sayfa.html
- Ceyhan İ. vd., *İstatistik Terimleri Sözlüğü*, Türk Dil Kurumu, 1983.
- Güriş S. ve E. Çağlayan, *Ekonometrik Terimler Sözlüğü*, Derin Yayınevi, 2007.
- Kutlar A., *Uygulamalı Ekonometri*, 2. b., Nobel Yayın Dağıtım, 2005.

- Şenesen Ü. ve G. G. Şenesen, *Temel Ekonometri*, 4. b., Literatür Yayıncılık, 2006.
- Tarı R., *Ekonometri*, 4. b., Kocaeli Üniversitesi Yayınları, 2006.

Terim Seçimine Örnek

- Kullanmakta olduğum terimler konusunda ısrarcı değilim. Öte yandan, belli bir terim için şu sözcük kullanılmalıdır denilecek olursa bunu nedeninin gösterilebilmesi gerek diye düşünüyorum.
- Örnek olarak, “asymptote” terimi için Türkçe kaynaklarda “kavuşmaz,” “sonuşmaz,” ve ”yanaşık” gibi karşılıkların kullanılmış olduğu görülmektedir. Diğer yandan, -iş -ış eki Türkçe’de yalnızca fiillerin sonuna geldiği için “sonuşmaz” sözcüğü dilbilgisi yönünden yanlıştır.
- Terimin kavramsal içeriğine dikkat ederek ve Türk Dili ve Edebiyatı Bölümü’nden hocalarıma danışarak “kavuşmaz” terimini yeğledim ve tüm akademisyen arkadaşlarıma da bir öneri olarak sundum.
- Buna benzer örnekleri çoğaltmak mümkündür.

Olası Yanlışlar Konusunda

Büyük titizlikle hazırladığım notlarımı zaman içerisinde çok kez gözden geçirme fırsatım olduğu için mutluyum. Ayrıca, bu ders malzemeleri TÜBA Açık Ders Malzemeleri Projesi kapsamında anonim ekonometriciler tarafından da incelenmiştir. En ufak bir yazım yanlışı bile olmaması gereken bu malzemelerde bir hata görürseniz, düzeltmem için lütfen benimle bağlantıya geçiniz.

A. Talha Yalta, Ekim 2011
http://yalta.etu.edu.tr

Bölüm 1

Dizey Cebirinin Gözden Geçirilmesi

1.1 Dizeylere İlişkin Temel Kavramlar

1.1.1 Tanımlar

- Dizey cebiri kullanmaksızın k değişkenli bir bağlanım modeliyle uğraşmak son derece karmaşık bir iştir.
- Burada, doğrusal bağlanım modelini dizey yaklaşımı ile ele alabilmek için gerekli temel altyapı sunulacaktır.

Dizey
$M \times N$ boyutlu bir *"dizey"* (matrix), M satır ve N sütun biçiminde düzenlenmiş sayılar ya da öğelerin dikdörtgen bir dizgesidir.

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- a_{ij} burada $\mathbf{A}$ dizeyinin i'inci satırı ve j'inci sütununda görülen öğeyi anlatmaktadır.
- 2×3 boyutundaki bir dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sayıl
"Sayıl" (scalar), tek bir gerçek sayıdır ve 1×1 boyutunda bir dizey kabul edilir.

- Sayıla örnek:

$$\mathbf{B}_{1\times1} = [5]$$

Sütun Yöneyi
Tek bir sütunu ve M sayıda satırı olan dizeye *"sütun yöneyi"* (column vector) denir.

- Sütun yöneyine örnek:

$$\mathbf{A}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Satır Yöneyi
Tek bir satırı ve N sayıda sütunu olan dizeye *"satır yöneyi"* (row vector) denir.

- Satır yöneyine örnek:

$$\mathbf{B}_{1\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Altdizey
$M \times N$ boyutundaki bir $\mathbf{A}$ dizeyinin r sayıda satırı ile s sayıda sütununun dışındaki tüm öğeleri silinirse elde edilen $r \times s$ boyutlu dizey, $\mathbf{A}$'ya ait bir *"altdizey"* (submatrix) olur.

- Örnek olarak, aşağıda verilen $\mathbf{A}$ dizeyinin üçüncü satırıyla ikinci sütununu silersek $\mathbf{A}$'nın 2×2 boyutundaki bir $\mathbf{B}$ altdizeyini bulmuş oluruz:

$$\mathbf{A}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1.2 Dizey Türleri

Kare Dizey
Satır sayısı sütun sayısı ile aynı olan dizeye *"kare dizey"* (square matrix) denir.

- Kare dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Köşegen Dizey
Asal (sol üst köşeden sağ alt köşeye uzanan) köşegeninde en az bir sıfırdan farklı öğe bulunan ve bu köşegen dışı tüm öğeleri sıfır olan dizeye *"köşegen dizey"* (diagonal matrix) denir.

- Köşegen dizeye örnek:

$$\mathbf{B}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Sayıl Dizey
Köşegeni üzerindeki öğelerinin hepsi aynı olan köşegen dizeye *"sayıl dizey"* (scalar matrix) denir.

- Sayıl dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Birim Dizey
Köşegeni üzerindeki öğelerinin hepsi 1 olan köşegen dizeye *"birim dizey"* (identity matrix) denir ve $\mathbf{I}$ ile gösterilir.

- Birim dizeye örnek:

$$\mathbf{I}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bakışımlı Dizey
Asal köşegeni üzerindeki öğeleri, asal köşegeni altındaki öğelerinin bakışımı olan dizeye *"bakışımlı dizey"* (symmetric matrix) denir. Devriği kendisine eşittir.

- Bakışımlı dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Eşit Dizeyler
$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ gibi iki dizeyin boyutları aynıysa ve karşılıklı öğeleri birbirine eşitse ($a_{ij} = b_{ij}$), bu dizeyler eşittir.

- Eşit dizeylere örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Boş Dizey
Bütün öğeleri sıfır olan dizeye *"boş dizey"* (null matrix) denir ve **0** ile gösterilir.

- Boş dizeye örnek:

$$\mathbf{0}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Boş Yöney
Bütün öğeleri sıfır olan satır ya da sütun yöneyine *"boş yöney"* (null vector) denir ve **0** ile gösterilir.

- Boş yöneye örnek:

$$\mathbf{0}_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Dizey İşlemleri

1.2.1 Temel İşlemler

Dizey Toplaması ve Çıkarması
$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ dizeylerinin toplamı ya da farkı, karşılıklı öğelerinin toplamı ya da farkı alınarak elde edilir. Bu dizeylerin toplama ya da çıkarma için uyumlu olabilmeleri için boyutları aynı olmalıdır.

- Dizey toplamasına örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times 2} + \mathbf{B}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Bir Dizeyin Bir Sayıl ile Çarpımı ya da Bölümü
Bir $\mathbf{A}$ dizeyini $\lambda \in \mathrm{R}$ sayılı ile çarpmak ya da bölmek için, dizeyin bütün öğeleri λ ile çarpılır ya da $\lambda \neq 0$'a bölünür.

Dizeyler Çarpımı
Boyutu $M \times N$ olan $\mathbf{A}$ ve boyutu $N \times P$ olan $\mathbf{B}$ dizeylerinin $\mathbf{AB}$ çarpımı, $M \times P$ boyutunda ve aşağıdaki gibi bir $\mathbf{C}$ dizeyi olur.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj} \qquad i = \{1, 2, \ldots, M\} \qquad j = \{1, 2, \ldots, P\}$$

- Diğer bir deyişle $\mathbf{C}$'nin i'inci satır ve j'inci sütun öğesi, $\mathbf{A}$'nın i'inci satırındaki öğelerinin $\mathbf{B}$'nin j'inci sütunundaki karşılıklı öğeleri ile çarpılıp, çarpımların toplanması ile bulunur.

Dizeyler çarpımı işlemi aşağıdaki özellikleri taşır:

1. Dizey çarpımı değişmeli olmak zorunda değildir. Kısaca dizeylerin çarpım sıralaması önemlidir: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

2. $\mathbf{AB}$ ve $\mathbf{BA}$'nın sonuç dizeyleri aynı boyutta olmayabilir:

$$\mathbf{A}_{K\times L}\mathbf{B}_{L\times K} = \mathbf{C}_{K\times K} \qquad \mathbf{B}_{L\times K}\mathbf{A}_{K\times L} = \mathbf{D}_{L\times L}$$

3. $\mathbf{A}_{1\times K}$ satır yöneyiyle önden çarpılan $\mathbf{B}_{K\times 1}$ sütun yöneyi bir sayıl olur.

4. $\mathbf{A}_{K\times 1}$ sütun yöneyiyle önden çarpılan $\mathbf{B}_{1\times K}$ satır yöneyi bir dizey olur.
5. Dizey çarpımı birleştiricidir: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
6. Dizey çarpımı toplama bakımından dağıtıcıdır:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$

Dizey Devriği Alma
$M \times N$ bir $\mathbf{A}$ dizeyinin $\mathbf{A}'$ ile gösterilen *"devriği"* (transpose), $\mathbf{A}$'nın satır ve sütunlarına yer değiştirterek, yani $\mathbf{A}$'nın i'inci satırını $\mathbf{A}'$'nün i'inci sütunu yaparak elde edilen $N \times M$ dizeyidir.

$$\mathbf{A}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}'_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bir satır yöneyinin devriği sütun yöneyi olup, bir sütun yöneyinin devriği de satır yöneyidir.

Devrik dizey dönüşümünün bazı özellikleri şunlardır:

1. Devrik bir dizeyin devriği ilk dizeydir: $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
2. İki dizey toplamının devriği, devriklerin toplamıdır:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}'+\mathbf{B}'$$

3. Dizey çarpımının devriği, bu dizeylerin devriklerinin ters sırada çarpımıdır: $(\mathbf{ABCD})' = \mathbf{D}'\mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}'$
4. Birim dizey $\mathbf{I}$'nın devriği kendisidir: $\mathbf{I}' = \mathbf{I}$
5. Bir sayılın devriği kendisidir. λ bir sayıl olsun: $\lambda' = \lambda$
6. λ bir sayıl olsun: $(\lambda\mathbf{A})' = \lambda\mathbf{A}' = \mathbf{A}'\lambda = \mathbf{A}'\lambda'$
7. $\mathbf{A}$ dizeyi eğer $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ olacak şekilde kare dizeyse, $\mathbf{A}$ bakışımlı bir dizey olur.

1.2.2 Belirleyen ve Dizey Tersi Alınması

Bir Dizeyin Belirleyeni

- Her kare dizey $\mathbf{A}$ için, *belirleyen* (determinant) diye bilinen ve $|\mathbf{A}|$ şeklinde gösterilen bir sayıl vardır.
- Bir dizeyin belirleyeninin hesaplanması, iyi tanımlı bir dizi işlem ile gerçekleştirilir.
- Örnek olarak 2×2 boyutundaki bir dizeyin belirleyeni, asal köşegen üzerindeki öğelerin çarpımından diğer köşegen öğelerinin çarpımının çıkartılması ile bulunur.
- Herhangi bir derecedeki belirleyenin açılımında, terimler dönüşümlü olarak $+$ ve $-$ işaret alırlar.
- 3×3 bir belirleyenin açılımında 6 terim bulunur. Genel olarak, $N \times N$ bir belirleyenin açılımında $N!$ terim vardır.
- Buna göre, 5×5 bir dizeye ait belirleyenin açılımında $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ terim bulunur.

Belirleyenin özellikleri aşağıdaki gibidir:

1. Belirleyeni sıfır olan dizeye *"tekil dizey"* (singular matrix) denir. Bir tekil dizeyin tersi bulunamaz.
2. $\mathbf{A}$'nın herhangi bir satırındaki tüm öğeler sıfırsa, belirleyeni de sıfır olur.
3. $\mathbf{A}$ ile devrik $\mathbf{A}$'nın belirleyenleri aynıdır: $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
4. $\mathbf{A}$ dizeyinin herhangi iki satır ya da sütunu yer değiştirirse, $|\mathbf{A}|$'nın işareti değişir.
5. $\mathbf{A}$'nın iki satır ya da sütunu aynıysa, belirleyeni sıfır olur.
6. $\mathbf{A}$'nın bir satır ya da sütunu başka bir satır ya da sütununun bir katı ya da doğrusal bir birleşimiyse, belirleyeni sıfırdır.
7. $\mathbf{A}$'nın bir satır ya da sütunundaki tüm öğeler bir λ sayılı ile çarpılırsa, $|\mathbf{A}|$ da λ ile çarpılır.
8. İki dizeyin çarpımının belirleyeni dizeylerin ayrı ayrı belirleyenlerinin çarpımına eşitir: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

Bir Dizeyin Derecesi
Bir dizeyin *"derecesi"* (rank), belirleyeni sıfır olmayan en büyük alt dizeyinin boyutudur.

- Örnek olarak, aşağıda verilen dizeyin 1. satırının 2. ve 3. satırların doğrusal bir birleşimi olduğu görülmektedir:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Buna göre, $\mathbf{A}$ tekil bir dizeydir ve $|\mathbf{A}| = 0$ olmaktadır.

- Diğer taraftan, $\mathbf{A}$'nın derecesi 2'dir çünkü 2×2 boyutlu altdizeylerinden birinin belirleyeni sıfırdan farklıdır:

$$\mathbf{B}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Minör
$N \times N$ boyutundaki bir $\mathbf{A}$ dizeyinin i'inci satırı ile j'inci sütunu silinirse, kalan altdizeyin belirleyenine a_{ij} öğesinin *"minörü"* (minor) denir ve $|\mathbf{M}_{ij}|$ ile gösterilir.

- Örnek olarak aşağıda verilen dizeyi ele alalım:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Burada a_{11}'in minörü şudur:

$$|\mathbf{M}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

Eşçarpan
$N \times N$ boyutlu bir $\mathbf{A}$ dizeyinin a_{ij} öğesinin *"eşçarpanı"* (cofactor) şöyle tanımlanır: $c_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$

- Bir başka deyişle eşçarpan işaretli bir minördür ve işareti de $(i + j)$ toplamı çiftse artı, tekse eksidir.

Eşçarpan Dizeyi
$\mathbf{A}$'nın *"eşçarpan dizeyi"* (cofactor matrix), a_{ij} öğelerinin yerine eşçarpanları koyularak elde edilir ve (cof $\mathbf{A}$) ile gösterilir.

Ek Dizey
"Ek dizey" (adjoint matrix), eşçarpan dizeyinin devriğidir ve (adj $\mathbf{A}$) ile gösterilir.

Dizey Tersi Hesaplama
$\mathbf{A}$ tekil olmayan ($|\mathbf{A}| \neq 0$) bir dizeyse, $\mathbf{A}^{-1}$ *"ters"* (inverse) dizeyi şu şekilde bulunur:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(\mathsf{adj}\mathbf{A})$$

Dizey tersi hesaplama işleminin adımları aşağıdaki gibidir:

1. $\mathbf{A}$'nın belirleyeni hesaplanır.
2. $\mathbf{A}$'nın a_{ij} öğelerinin yerine eşçarpanları koyularak eşçarpan dizeyi (cof $\mathbf{A}$) elde edilir.
3. Eşçarpan dizeyin devriği alınarak ek dizey (adj $\mathbf{A}$) bulunur.
4. Son olarak ek dizeyin tüm öğeleri $|\mathbf{A}|$'ya bölünür.

Dizeylerde Türev Alma
Dizeylerde türev almaya ilişkin iki önemli kural şunlardır:

1. Eğer $\mathbf{a}'$ $1 \times N$ boyutunda bir satır yöneyi ve $\mathbf{x}$ de $N \times 1$ boyutlu bir sütun yöneyi ise, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

2. Eğer $\mathbf{A}$ $N \times N$ boyutunda bir kare dizeyse, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x} = 2\mathbf{x}'\mathbf{A}$$

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Appendix B* “Rudiments of Matrix Algebra” okunacak.

Önümüzdeki Ders
Doğrusal Bağlanım Modeline Dizey Yaklaşımı

Bölüm 2

Doğrusal Bağlanım Modeline Dizey Yaklaşımı

2.1 Dizey Yaklaşımı ile Doğrusal Bağlanım Modeli

2.1.1 k Değişkenli Modelin Dizey Gösterimi

Dizey Yaklaşımının Önemi

- Y bağımlı değişkeni ile $(k-1)$ sayıda açıklayıcı değişken (X_2,X_3, …,X_k) içeren k değişkenli doğrusal bağlanım modelini ele almak için en doğru yaklaşım dizey cebiridir.
- Dizey cebirinin *"sayıl"* (scalar) cebirine üstünlüğü, herhangi bir sayıda değişken içeren bağlanım modellerini ele alıştaki yalın ve öz yaklaşımıdır.
- k değişkenli model bir kez kurulduktan ve dizey cebiri ile çözüldükten sonra bu çözüm çok sayıda değişkene kolaylıkla uygulanabilir.

k Değişkenli Bağlanımın Dizey Gösterimi

- k değişkenli anakütle bağlanım işlevini anımsayalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

- Burada i örneklem büyüklüğü olduğuna göre, elimizdeki ABİ şu n sayıdaki eşanlı denklemin kısa yazılışıdır:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
Y_1 & = & \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ldots + \beta_k X_{k1} & + & u_1 \\
Y_2 & = & \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ldots + \beta_k X_{k2} & + & u_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \; \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \; \ddots \; \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\
Y_n & = & \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \ldots + \beta_k X_{kn} & + & u_n
\end{array}$$

- Yukarıdaki denklem setini şöyle de gösterebiliriz:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \ldots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \ldots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \ldots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- Ya da kısaca $\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times k}\mathbf{B}_{k\times 1} + \mathbf{u}_{n\times 1}$.

- $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{u}$'nun boyutlarının karışıklığa yol açmayacağı durumda, doğrusal bağlanım modelinin dizey gösterimi aşağıdaki gibi olur:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$$

- Burada
  $\mathbf{Y}$ bağımlı değişken gözlemlerinin $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyini,
  $\mathbf{X}$ X_2'den X_k'ye kadar olan $k-1$ değişkenin n sayıdaki gözleminin $n \times k$ boyutlu dizeyini,
  $\mathbf{B}$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ anakütle katsayılarının $k \times 1$ boyutlu sütun yöneyini,
  $\mathbf{u}$ ise u_i *"bozukluk"* (disturbance) teriminin $n \times 1$ boyutundaki sütun yöneyini
  göstermektedir.

- Örnek olarak daha önce incelemiş olduğumuz iki değişkenli tüketim-gelir modelinin dizey yaklaşımı ile gösterimi şudur:

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 65 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 115 \\ 120 \\ 140 \\ 155 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 140 \\ 1 & 160 \\ 1 & 180 \\ 1 & 200 \\ 1 & 220 \\ 1 & 240 \\ 1 & 260 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{bmatrix}$$

- Bu da kısaca şöyle yazılabilir:

$$\mathbf{Y}_{10\times 1} = \mathbf{X}_{10\times 2}\mathbf{B}_{2\times 1} + \mathbf{u}_{10\times 1}$$

2.1.2 KDBM Varsayımlarının Dizey Gösterimleri

Dizey cebiri yaklaşımı, önceden görmüş olduğumuz klasik doğrusal bağlanım modeli (KDBM) varsayımlarını incelemede büyük kolaylık sağlamaktadır. Şimdi bu beş varsayımı dizey yaklaşımı ile ele alalım:

1. Varsayım
$\mathbf{u}$ bozukluk yöneyinin tüm öğeleri için beklenen değer sıfırdır. Kısaca hata teriminin beklenen değeri sıfırdır: $E(\mathbf{u}) = 0$.

- Daha açık olarak $E(\mathbf{u}) = 0$ şu demektir:

$$E\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Varsayım
u_i hataları, sıfır ortalama ve sabit bir varyans ile normal dağılırlar: $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$.

- $\mathbf{u}$ burada $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyi, $\mathbf{0}$ ise aynı boyutlu bir boş yöneydir.
- Bu varsayım, bağlanımın tahmin edilmesinden sonra çeşitli önsav sınamalarının yapılabilmesi için gereklidir.

3. Varsayım
Hatalar arasında özilinti yoktur: $E(\mathbf{uu}') = \sigma^2\mathbf{I}$.

- Bu varsayımın daha önce sayısal olarak ele alınan üç varsayımın kısa ve öz anlatımı olduğu şöyle gösterilebilir:

$$E(\mathbf{uu}') = E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix}$$

- Dizeyin her bir öğesinin beklenen değerini alalım:

$$E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & \dots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & \dots & E(u_2u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & \dots & E(u_n^2) \end{bmatrix}$$

- Hata terimi ortalaması sıfır varsayılıdır: $E(u_i) = \mu = 0$

- Varyans ve kovaryansın formüllerini anımsayalım:

$$\text{var}(X) = E(X^2) - \mu^2, \qquad \text{cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

- Bu durumda, u_i hatalarının *"varyans-kovaryans dizeyi"* (variance-covariance matrix) üçüncü varsayıma göre şöyle olmalıdır:

$$E(\mathbf{uu}') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

4. Varsayım
$n \times n$ boyutlu $\mathbf{X}$ dizeyi olasılıksal değildir.

- Diğer bir deyişle $X_{2i}, X_{3i}, \dots, X_{ki}$ değişmeyen sayılardan oluşmaktadır.
- Başta belirtildiği gibi, elimizdeki bağlanım çözümlemesi X değişkenlerinin verili değerlerine bağlı bir koşullu bağlanım çözümlemesidir.

5. Varsayım
$\mathbf{X}$'in derecesi k'dir: $\rho(\mathbf{X}) = k$. k burada $\mathbf{X}$'in sütun sayısı olup, gözlem sayısı n'den küçüktür.

- Diğer bir deyişle, X değişkenleri arasında tam bir doğrusal ilişki ya da *"çoklueşdoğrusallık"* (multicollinearity) yoktur.
- Eğer bu varsayım gerçekleşmez ise, bağlanıma ait $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ dizeyinin belirleyeni sıfır olur ve çözümlemede gerekli olan tersi bulunamaz.

2.2 Dizey Yaklaşımı ile Tahmin Sorunu

2.2.1 SEK Tahmincilerinin Bulunması

- $\mathbf{B}$ yöneyini tahmin etmek için sıradan enküçük kareler (SEK) ya da ençok olabilirlik (EO) gibi farklı yaklaşımlar kullanılabildiğini biliyoruz.
- Biz dikkatimizi SEK yöntemi üzerinde toplayacağız.
- Bağlanımın SEK tahminini bulmak için önce k değişken içeren örneklem bağlanım işlevini yazalım:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + \hat{u}_i$$

- ÖBİ'yi dizey gösterimiyle açık olarak şöyle gösterebiliriz:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix}$$

- Ya da kısaca

$$\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times k}\hat{\mathbf{B}}_{k\times 1} + \hat{\mathbf{u}}_{n\times 1}$$

- Bilindiği gibi SEK tahmincileri hata kareleri toplamının enazlanması yolu ile bulunmaktadır.
- Öyleyse yukarıdaki eşitliği şu şekilde de yazabiliriz:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$$

- Hata kareleri toplamının aşağıdaki gösterim biçimine dikkat edelim:

$$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \dots & \hat{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \hat{u}_1{}^2 + \hat{u}_2{}^2 + \cdots + \hat{u}_n{}^2 = \sum \hat{u}_i{}^2$$

- Buna göre $\mathbf{u}'\mathbf{u}$'nun dizey gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

- *Dikkat:* Burada $\mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$ bir sayıl olduğu için, kendi devriği olan $\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$'ye eşittir.
- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$ eşitliğini enazlamak için, bu eşitliğin $\hat{\mathbf{B}}$'ya göre kısmi türevini alır ve sıfıra eşitleriz.
- Bu işlem bize *"normal denklemler"* (normal equations) denilen k bilinmeyenli k eşanlı denklemi verir:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\hat{\beta}_1 n + & \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + & \hat{\beta}_3 \sum X_{3i} + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{ki} & = & \sum Y_i \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{2i} + & \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + & \hat{\beta}_3 \sum X_{2i}X_{3i} + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{2i}X_{ki} & = & \sum X_{2i}Y_i \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{3i} + & \hat{\beta}_2 \sum X_{3i}X_{2i} + & \hat{\beta}_3 \sum X_{3i}^2 + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{3i}X_{ki} & = & \sum X_{3i}Y_i \\
\vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{ki} + & \hat{\beta}_2 \sum X_{ki}X_{2i} + & \hat{\beta}_3 \sum X_{ki}X_{3i} + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{ki}^2 & = & \sum X_{ki}Y_i
\end{array}$$

- Yukarıdaki denklem takımının dizey gösterimi şudur:

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \dots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \dots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \dots & \sum X_{3i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & \dots & X_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

- Bu da kısaca $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{k\times k}\hat{\mathbf{B}}_{k\times 1} = \mathbf{X}'_{k\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$ diye yazılır.

Normal denklemlerin dizey gösteriminde yer alan aşağıdaki $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ dizeyi önemlidir.

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \dots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \dots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \dots & \sum X_{3i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

Bu dizeyin şu üç özelliğine dikkat edelim:

1. $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ dizeyi $k \times k$ boyutundadır ve olasılıksal değildir.
2. Asal köşegen öğeleri ham kare toplamlarını, köşegen dışı öğeler ise ham çapraz çarpım toplamlarını gösterir.
3. $X_{2i}X_{3i}$ çapraz çarpımı $X_{3i}X_{2i}$ çapraz çarpımına eşit olduğu için dizey bakışımlıdır.

- Sonuç olarak, k değişkenli modelin SEK tahmincilerini elde etmek için normal denklemlerin dizey gösterimini yazalım:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

- Eğer $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ dizeyinin tersi varsa, yukarıdaki denklemin her iki yanını bu ters dizeyle önden çarparak şunu bulabiliriz:

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{X}'\mathbf{Y}\\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\\ \mathbf{I}\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\end{aligned}$$

- Buna göre SEK kuramının temel denkleminin dizey gösterimi şudur:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

- Yukarıdaki eşitlik, eldeki verilerden $\hat{\mathbf{B}}$ yöneyinin nasıl tahmin edileceğini gösterir.

2.2.2 Varyans-Kovaryans Dizeyi

- Herhangi bir $\hat{\beta}_i$ varyansı yanında tüm $\hat{\beta}_i$ ve $\hat{\beta}_j$'lar arasındaki kovaryansları dizey yöntemi ile kolayca gösterebiliriz.
- Bu varyans ve kovaryanslar çeşitli istatistiksel çıkarsama işlemleri için önemlidir.
- $\hat{\mathbf{B}}$'nın *"varyans-kovaryans dizeyi"* (variance-covariance matrix) şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = E\left([\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}][\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}]'\right)$$

- Buna göre $\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}})$ aslında şu dizeydir:

$$\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_1) & \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \dots & \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \text{var}(\hat{\beta}_2) & \dots & \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \text{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \dots & \text{var}(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix}$$

varcov(B) Dizeyinin Türetilmesi

- $\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}})$'yı türetmede $\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$ eşitliğinden yararlanılır.

Üsttekini $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}$ temel denkleminde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}(\mathbf{XB}+\mathbf{u})\\ &= (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'XB} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'u}\\ &= \mathbf{B} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'u}\end{aligned}$$

Demek ki $\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'u}$. $\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}})$ varyans-kovaryans dizeyi ise tanım gereği şöyledir:

$$\begin{aligned}\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) &= E([\hat{\mathbf{B}}-\mathbf{B}][\hat{\mathbf{B}}-\mathbf{B}]')\\ &= E\left([(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'u}][(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'u}]'\right)\\ &= E\left((\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'uu'X}(\mathbf{X'X})^{-\mathbf{1}}\right)\end{aligned}$$

- X'lerin olasılıksal olmadığına dikkat edilerek şu bulunabilir:

$$\begin{aligned}\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) &= (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'E}(\mathbf{uu'})\mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-\mathbf{1}}\\ &= (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\sigma^2\mathbf{IX}(\mathbf{X'X})^{-\mathbf{1}}\\ &= \sigma^2(\mathbf{X'X})^{-\mathbf{1}}\end{aligned}$$

- *Dikkat:* Yukarıda $E(\mathbf{uu'}) = \sigma^2\mathbf{I}$ varsayımı kullanılmıştır.

- Türetilmesinden de anlaşılacağı gibi varyans-kovaryans dizeyi aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

  Varyans-kovaryans Dizeyi

$$\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = \sigma^2(\mathbf{X'X})^{-\mathbf{1}}$$

- $(\mathbf{X'X})^{-\mathbf{1}}$ burada $\hat{\mathbf{B}}$ SEK tahmincilerini veren eşitlikte yer alan ters dizeydir.

- σ^2 ise u_i'nin sabit varyansıdır. Uygulamada σ^2 yerine yansız tahminci $\hat{\sigma}^2$ kullanılır.

- k değişkenli durumda $\hat{\sigma}^2$ aşağıdaki eşitlikten bulunabilir:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i{}^2}{n-k} = \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{n-k}$$

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$, ilke olarak tahmin edilen kalıntılardan bulunabilse de uygulamada şu yolla doğrudan hesaplanabilir:

$$\sum \hat{u_i}^2 = \text{KKT} = \text{TKT} - \text{BKT}$$

- Toplam kareleri toplamı aşağıdaki şekilde gösterilir:

  Toplam kareleri toplamı

$$\sum \hat{y_i}^2 = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$$

- $n\bar{Y}^2$ terimi burada ortalamadan sapma kareleri toplamının bulunması için gereken düzeltme terimidir.

- Bağlanım kareleri toplamının dizey gösterimi ise şöyledir:

  Bağlanım kareleri toplamı

$$\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum y_i x_{ki} = \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$$

- Kalıntı kareleri toplamı KKT ise TKT ve BKT'nin dizey gösterimleri kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

  Kalıntı kareleri toplamı

$$\begin{aligned} \text{KKT} &= \text{TKT} - \text{BKT} \\ \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} &= (\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2) - (\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} \end{aligned}$$

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$ bulunduktan sonra $\hat{\sigma}^2$'yi kolayca hesaplayabiliriz.

- $\hat{\sigma}^2$'yi hesapladıktan sonra ise varyans-kovaryans dizeyini tahmin edebiliriz.

SEK Tahmincilerinin Özellikleri

- SEK tahmincilerinin en iyi doğrusal yansız tahminci ya da kısaca *"EDYT"* (BLUE) olduklarını biliyoruz.

- Bu özellik elbette dizey yaklaşımıyla bulunan $\hat{\mathbf{B}}$ için de geçerlidir.

- Buna göre $\hat{\mathbf{B}}$ yöneyinin her bir öğesi bağımlı değişken Y'nin doğrusal işlevidir.

- $\hat{\mathbf{B}}$ yansızdır. Diğer bir deyişle tüm öğelerinin beklenen değeri öğenin kendisine eşittir: $E(\hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{B}$.

- SEK tahmincisi $\hat{\mathbf{B}}$, tüm $\mathbf{B}$ tahmincileri içinde en iyi, enaz varyanslı tahmincidir.

Belirleme Katsayısının Dizey Gösterimi

- Belirleme katsayısı R^2'yi daha önce şöyle tanımlamıştık:

$$R^2 = \frac{\text{BKT}}{\text{TKT}}$$

- Buna göre belirleme katsayısının dizey gösterimi de şöyledir:

$$R^2 = \frac{\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}$$

İlinti Dizeyi

- Dizey yaklaşımında, k değişkenli durum için, değişkenler arasındaki sıfırıncı dereceden ilinti katsayılarını veren *"ilinti dizeyi"* (correlation matrix) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Burada 1 alt imi bağımlı değişken Y'yi gösterir. Örnek olarak, Y ile X_2 arasındaki ilinti katsayısı r_{12}'dir.
- Asal köşegen üzerindeki 1'ler ise bir değişkenin kendisiyle olan ilinti katsayısının her zaman 1 olmasındandır.
- İlinti dizeyi $\mathbf{R}$ kullanılarak birinci dereceden ve daha yüksek dereceden ilinti katsayılarını da elde etmek olasıdır.

2.3 Dizey Yaklaşımı ile Çıkarsama Sorunu

2.3.1 Bireysel Katsayıların Önsav Sınamaları

- Tahmin sonrasında çıkarsama yapabilmek için, u_i hatalarının sıfır ortalama ve sabit varyans σ^2 ile normal dağıldıklarını varsayıyoruz:

$$\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$$

- $\mathbf{u}$ burada $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyi, $\mathbf{0}$ ise boş yöneydir.
- Buna göre, SEK tahmincileri $\hat{\beta}_i$'lar da aşağıda gösterilen şekilde normal dağılırlar:

$$\hat{\mathbf{B}} \sim N[\mathbf{B}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]$$

- Demek ki $\hat{\mathbf{B}}$'nın her öğesi, gerçek $\mathbf{B}$ öğesiyle eşit ortalama ile ve $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ters dizeyinin asal köşegenindeki uygun öğe çarpı σ^2'ye eşit varyans ile normal dağılmaktadır.
- $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$'in varyans-kovaryans dizeyi olduğuna dikkat ediniz.
- Uygulamada σ^2 bilinmediği için t dağılımına geçilir ve $\hat{\sigma}^2$ tahmincisi kullanılır.
- Bu durumda $\hat{\mathbf{B}}$'nın her öğesi $n-k$ sd ile t dağılımına uyar:

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\text{öh}(\hat{\beta}_i)}$$

- $\hat{\beta}_i$ burada $\hat{\mathbf{B}}$'nın bir öğesidir.
- Demek ki t dağılımını kullanarak herhangi bir $\hat{\beta}_i$'nın güven aralığını bulmak ve çeşitli sınamaları yapmak olanaklıdır.

2.3.2 Varyans Çözümlemesi ve F Sınamaları

Varyans Çözümlemesinin Dizey Gösterimi

- Tüm bağlanım katsayılarının eşanlı olarak sıfıra eşit olduğu önsavını sınamak ya da bir değişkenin ek katkısını ölçmek için VARÇÖZ yönteminin kullanıldığını anımsayalım.
- TKT, BKT ve KKT'nin dizey gösterimleri kullanılarak aşağıdaki gibi bir VARÇÖZ çizelgesi düzenlenebilir:

Değişimin Kaynağı	KT	sd	OKT
Bağlanımdan (BKT)	$\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$k-1$	$\frac{\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}{k-1}$
Kalıntılardan (KKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$	$n-k$	$\frac{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{n-k}$
Toplam (TKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$n-1$	

- Buna göre:

$$F = \frac{(\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)/(k-1)}{(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y})/(n-k)}$$

- F ve R^2 değerlerinin yakın ilişkili olduğunu biliyoruz.
- Buna göre VARÇÖZ çizelgesinin R^2 gösterimi de şöyledir:

Değişimin Kaynağı	KT	sd	OKT
Bağlanımdan (BKT)	$R^2(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$	$k-1$	$\frac{R^2(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)}{k-1}$
Kalıntılardan (KKT)	$(1-R^2)(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$	$n-k$	$\frac{(1-R^2)(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)}{n-k}$
Toplam (TKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$n-1$	

- Demek ki:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

- Bu gösterimin üstünlüğü, tüm hesaplamaların yalnız R^2 ile yapılabilmesi ve sadeleştirme sonrası ortadan kalkacak olan $(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$ terimiyle ilgilenmeye gerek kalmamasıdır.

F Sınamasının Dizey Gösterimi

- Genel olarak, F sınamasının amacı bir ya da birden fazla anakütle katsayısı üzerine konulan doğrusal sınırlamaları sınamaktır.
- Bu sınamanın dizey karşılığını türetebilmek için aşağıdaki tanımlardan yararlanalım:

$\hat{\mathbf{u}}_S$	: Sınırlamalı SEK bağlanımının kalıntı yöneyi
$\hat{\mathbf{u}}_{SM}$	: Sınırlamasız SEK bağlanımının kalıntı yöneyi
$\hat{\mathbf{u}}'_S\hat{\mathbf{u}}_S = \sum \hat{u}_S^2$	: Sınırlamalı bağlanıma ait KKT
$\hat{\mathbf{u}}'_{SM}\hat{\mathbf{u}}_{SM} = \sum \hat{u}_{SM}^2$	: Sınırlamasız bağlanıma ait KKT
m	: Doğrusal sınırlama sayısı
k	: Sabit terim dahil anakütle katsayılarının sayısı
n	: Gözlem sayısı

- Genel F sınamasının dizey gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$F = \frac{(\hat{\mathbf{u}}'_S\hat{\mathbf{u}}_S - \hat{\mathbf{u}}'_{SM}\hat{\mathbf{u}}_{SM})/m}{(\hat{\mathbf{u}}'_{SM}\hat{\mathbf{u}}_{SM})/(n-k)}$$

- Yukarıda gösterilen istatistik, m ve $(n-k)$ serbestlik derecesi ile F dağılımına uyar.
- Hesaplanan F değeri eğer kritik F değerinden büyükse, sınırlamalı bağlanım sıfır önsavı reddedilir.

2.3.3 Dizey Gösterimi ile Kestirim

- Tahmin edilen bir bağlanım işlevi, belli bir X_0 değerine karşılık gelen Y'yi kestirmek için kullanılabilir.
- İki türlü kestirim vardır: *"Ortalama kestirimi"* (mean prediction) ve *"bireysel kestirim"* (individual prediction).
- Ortalama kestirimi, seçili X_0 değerlerine bağlanım doğrusu üzerinde yakıştırılan noktanın tahmin edilmesi demektir.
- Bireysel kestirim ise X_0'ın karşılığı olan Y değerinin kendisidir.
- Bu iki kestirim biçimi de $\hat{Y}$ için aynı nokta tahmini verir.
- Diğer yandan bireysel kestirimin varyansı, ölçünlü hatası ve bunlara bağlı olarak da güven aralığı ortalama kestirime göre daha yüksektir.

Ortalama Kestiriminin Dizey Gösterimi

- Ortalama kestirimini dizey cebiri ile göstermek için, tahmin edilen çoklu bağlanımın sayıl gösterimini anımsayalım:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki}$$

- Yukarıdaki eşitliğin dizey gösterimi kısaca şöyledir:

$$\hat{Y}_i = \mathbf{x'}_i \hat{\mathbf{B}}$$

- $\mathbf{x'}_i = [1, X_{2i}, X_{3i}, \ldots, X_{ki}]$ burada bir satır yöneyidir.
- $\hat{\mathbf{B}}$ ise tahmin edilen β'ları gösteren bir sütun yöneyidir.
- Buna göre, verili bir $\mathbf{x'}_0 = [1, X_{20}, X_{30}, \ldots, X_{k0}]$ yöneyine karşılık gelen $\hat{Y}_0$ ortalama kestirimi aşağıdaki biçimi alır:

$$(\hat{Y}_0 | \mathbf{x'}_0) = \mathbf{x'}_0 \hat{\mathbf{B}}$$

- Burada $\mathbf{x}_0$'lar verili değerlerdir.
- Ortalama kestirimi ayrıca yansızdır: $E(\mathbf{x'}_0 \hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{x'}_0 \hat{\mathbf{B}}$.
- Ortalama kestiriminin varyansı ise şöyledir:

$$\text{var}(\hat{Y}_0 | \mathbf{x'}_0) = \sigma^2 \mathbf{x'}_0 (\mathbf{X'X})^{-1} \mathbf{x'}_0$$

- $\mathbf{x'}_0$ burada kestirim yapmada kullanılan X değişkenlerinin verili değerlerini içeren satır yöneyidir.
- $(\mathbf{X'X})^{-1}$ ise çoklu bağlanım tahmininde kullanılan dizeydir.
- Uygulamada, hata teriminin sabit varyansı σ^2 yerine yansız tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ koyularak formül şu şekilde yazılır:

$$\text{var}(\hat{Y}_0 | \mathbf{x'}_0) = \hat{\sigma}^2 \mathbf{x'}_0 (\mathbf{X'X})^{-1} \mathbf{x'}_0$$

- Yukarıdaki eşitlik kullanılarak, $\mathbf{x'}_0$ veriliyken $\hat{Y}_0$ ortalama kestiriminin $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı bulunabilir.

Bireysel Kestirimin Dizey Gösterimi

- Y'nin bireysel kestirimi $(Y_0|\mathbf{x'}_0)$, ortalama kestirimi $(\hat{Y_0}|\mathbf{x'}_0)$ ile aynıdır:

$$(Y_0|\mathbf{x'}_0) = \mathbf{x'}_0\hat{\mathbf{B}}$$

- Diğer yandan, bireysel kestirimin varyansı ortalama kestiriminin varyansından daha büyüktür:

$$\text{var}(Y_0|\mathbf{x'}_0) = \hat{\sigma}^2[1 + \mathbf{x'}_0(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{x'}_0]$$

- $\text{var}(Y_0|\mathbf{x'}_0)$ burada $E[Y_0 - \hat{Y_0}|X]^2$ demektir.
- Uygulamada, ortalama kestiriminde olduğu gibi, σ^2 yerine yansız tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ kullanılır.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Appendix C* "The Matrix Approach to Linear Regression Model" okunacak.

Önümüzdeki Ders
Çoklueşdoğrusallık

Bölüm 3

Çoklueşdoğrusallık

3.1 Çoklueşdoğrusallığın Niteliği

3.1.1 Çoklueşdoğrusallık Kavramı

Klasik doğrusal bağlanım modelinin (KDBM) varsayımlarından biri, modele katılan değişkenler arasında *"çoklueşdoğrusallık"* (multicollinearity) olmadığı yönündedir. Gözlem sayısının açıklayıcı değişken sayısından çok olduğu ve açıklayıcıların yeterince değişkenlik gösterdiği varsayımları da çoklueşdoğrusallığın olmadığı varsayımının tamamlayıcılarıdır. Bu bölümde şu sorulara yanıt arayacağız:

1. Çoklueşdoğrusallığın niteliği nedir?
2. Çoklueşdoğrusallık gerçekten bir sorun mudur?
3. Uygulamada doğurduğu sonuçlar nelerdir?
4. Varlığı nasıl anlaşılabilir?
5. Düzeltmek için ne gibi önlemler alınabilir?

- Eşdoğrusallık kavramını ilk kez 1934 yılında Ragnar Frisch öne sürmüştür.
- Önceleri bu terim bir bağlanım modelinin tüm ya da bazı açıklayıcı değişkenleri arasında *"kusursuz"* (perfect) ya da *"tam"* (exact) bir doğrusal ilişki olduğu anlamına geliyordu.
- Aşağıdaki örneği ele alalım:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k = 0$$

- Yukarıdaki eşitlikte yer alan herhangi bir X, örnek olarak X_2, diğerlerinin doğrusal işlevi olarak gösterilebilir:

$$X_2 = -\tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}X_1 - \tfrac{\lambda_3}{\lambda_2}X_3 - \cdots - \tfrac{\lambda_k}{\lambda_2}X_k$$

- Diğer bir deyişle bu örnekteki herhangi bir X değişkenini diğerlerinin doğrusal bir bileşiminden türetmek olasıdır.
- Bugün çoklueşdoğrusallık hem tam çoklueşdoğrusallığı hem de X değişkenlerinin genel olarak birbirleriyle ilişkili olduklarını gösteren daha geniş bir anlam içermektedir:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k + v_i = 0$$

- v_i burada olasılıksal hata terimidir.
- Örnek olarak X_2 şu şekilde yazılabilir:

$$X_2 = -\tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}X_1 - \tfrac{\lambda_3}{\lambda_2}X_3 - \cdots - \tfrac{\lambda_k}{\lambda_2}X_k - \tfrac{1}{\lambda_2}v_i$$

- Buna göre X_2, diğer X değişkenlerinin kusursuz olmayan bir doğrusal bileşimidir.
- Tanımladığımız şekliyle çoklueşdoğrusallık, yalnızca X'ler arasındaki doğrusal ilişkileri anlatmaktadır.
- Örnek olarak aşağıdaki *"çokterimli"* (polynomial) bağlanım modelini ele alalım:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + u_i$$

- Burada X_i, X_i^2 ve X_i^3'ün işlevsel ilişki içinde olduğu açıktır.
- Ancak bu ilişki doğrusal olmadığı için çoklueşdoğrusallığın olmadığı varsayımını çiğnemez.
- Uygulamada ise X_i, X_i^2, ve X_i^3 arasında hesaplanan ilinti katsayısı yüksek çıkacak ve bu da anakütle katsayılarının tahmin edilmesini güçleştirecektir.

- Tam ve tamdan az eşdoğrusallık arasındaki farkı daha iyi görebilmek için, aşağıdaki varsayımsal verileri inceleyelim:

X_1	X_2	X_2^*
10	50	52
15	75	75
18	90	97
24	120	129
30	150	152

- Bu örnekte $X_2 = 5X_1$ olduğu için, X_1 ile X_2 arasında tam eşdoğrusallık bulunmaktadır.
- Diğer bir deyişle ilinti katsayısı $r_{12} = 1$'dir.
- X_2^* değişkeni ise X_2'ye rastsal sayılar çizelgesinden alınan $\{2, 0, 7, 9, 2\}$ sayılarının eklenmesiyle bulunmuştur.
- X_1 ile X_2^* arasında bir tam eşdoğrusallık olmamakla birlikte çok güçlü bir ilinti ($r_{12}^* = 0{,}9959$) bulunmaktadır.

Çoklueşdoğrusallığın Nedenleri

Çoklueşdoğrusallık şu etmenlere bağlı olabilir:

1. *Veri derleme yöntemi:* Örnek olarak, bir X'in anakütlede aldığı değerlerin sınırlı bir aralığından örneklem almak.
2. *Anakütle kısıtlamaları:* Örnek olarak, elektrik tüketiminin gelir ve konut büyüklüğüne göre bağlanımında görülen yüksek gelirli ailelerin büyük evlerde oturmaları durumu.
3. *Model kurma hatası:* Örnek olarak, bir X değişkeninin gözlenen aralığı darken bağlanım modeline X^2 gibi terimler eklemek.
4. *Aşırı belirtimli model:* Modelin gözlem sayısına göre çok fazla sayıda değişken içermesi.

3.1.2 Çoklueşdoğrusallık Varken Tahmin

Tam Eşdoğrusallık

- Tam çoklueşdoğrusallık durumunda bağlanım katsayıları belirsizdir.
- Ayrıca $\hat{\beta}$ katsayılarının ölçünlü hataları da sonsuz olur.

- Bunu görebilmek için üç değişkenli modeli sapmalar biçiminde yazalım:

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + u_i$$

- Tahmin edilen β değiştirgeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= \frac{(\sum y_i x_{2i})(\sum x_{3i}^2) - (\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2} \\ \hat{\beta}_3 &= \frac{(\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i}^2) - (\sum y_i x_{2i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2} \end{aligned}$$

- Şimdi, $X_{3i} = \lambda X_{2i}$ diyelim ve $\lambda \neq 0$ olsun.
- Bu durumda tahmin edilen değiştirgeler şuna indirgenir:

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_3 = \hat{\beta} = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\lambda^2 \sum x_{2i}^2) - (\lambda \sum y_i x_{2i})(\lambda \sum x_{2i}^2)}{(\sum x_{2i}^2)(\lambda^2 \sum x_{2i}^2) - \lambda^2 (\sum x_{2i}^2)^2} = \frac{0}{0}$$

- Yukarıdaki gösterimin belirsiz olmasının nedeni, X_{2i} ile X_{3i}'nin tam eşdoğrusallıktan dolayı birbirlerinden ayrılamamasıdır.
- X_{2i} değişince X_{3i} de λ çarpanıyla değişir, sabit tutulamaz.
- Uygulamada bu durum yıkıcı olur çünkü bütün amaç zaten X_{2i} ve X_{3i}'nin Y_i üzerindeki kısmi etkilerini ayrıştırmaktır.
- Tam çoklueşdoğrusallığın yol açtığı belirsizlik sorununu görmek için $X_{3i} = \lambda X_{2i}$ özdeşliğini modele yerleştirelim:

$$\begin{aligned} y_i &= \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 (\lambda x_{2i}) + u_i \\ &= (\hat{\beta}_2 + \lambda \hat{\beta}_3) x_{2i} + u_i \\ &= \hat{\alpha} x_{2i} + u_i \end{aligned}$$

- Demek ki α değeri için tek bir tahmin yapılabilirken, β_2 ile β_3 için ayrı ayrı iki tahmin yapılamaz:

$$\hat{\alpha} = (\hat{\beta}_2 + \lambda \hat{\beta}_3) \qquad \hat{\beta}_2 = \hat{\alpha} - \lambda \hat{\beta}_3$$

Yüksek Eşdoğrusallık

- Tam çoklueşdoğrusallık uç bir durumdur. İktisadi verilerde genellikle tam doğrusal ilişkiye rastlanmaz.
- Yüksek çoklueşdoğrusallık durumu için şu ilişkiye bakalım:

$$x_{3i} = \lambda x_{2i} + v_i$$

- Burada $\lambda \neq 0$'dır. v_i ise x_{2i}'den bağımsız ($\sum x_{2i} v_i = 0$) bir olasılıksal hata terimidir.
- Yukarıda gösterilen yüksek çoklueşdoğrusallık durumunda, β_2 ve β_3 katsayılarının tahmin edilmesi olanaklıdır:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\lambda^2 \sum x_{2i}^2 + \sum v_i^2) - (\lambda \sum y_i x_{2i} + \sum y_i v_i)(\lambda \sum x_{2i}^2)}{(\sum x_{2i}^2)(\lambda^2 \sum x_{2i}^2 + \sum v_i^2) - (\lambda \sum x_{2i}^2)^2}$$

- Yukarıdakine benzer bir gösterim β_3 için de çıkarılabilir.
- Demek ki yüksek çoklueşdoğrusallık durumunda tahmin yapılmasını engelleyen bir durum yoktur.

3.2 Çoklueşdoğrusallığın Sonuçları

3.2.1 Kuramsal Sonuçlar

- Çoklueşdoğrusallık tama yakın olsa bile SEK tahmincileri yansız ve enaz varyanslıdırlar.
- Diğer bir deyişle, çoklueşdoğrusallık durumunda da SEK tahmincileri EDYT'dirler.
- Çoklueşdoğrusallığın tek etkisi, ölçünlü sapması düşük tahminler yapmayı güçleştirmesidir.
- Kuramsal anlamda (1) çoklueşdoğrusallık, (2) az sayıda gözlem ve (3) yüksek varyanslı bağımsız değişkenler kavramları aynı sorunun üç farklı şekilde dile getirilmesidir.
- Goldberger gibi bazı ekonometriciler, örneklem büyüklüğü konusunu vurgulamak için çoklueşdoğrusallık terimi yerine *"mikrosayıdalık"* (micronumerosity) sözcüğünü yeğlerler.
- Çoklueşdoğrusallık temelde bir örneklem ya da örneklem bağlanımı olgusudur.
- Diğer bir deyişle, X değişkenleri anakütlede doğrusal ilişkili olmasalar bile eldeki örneklemde doğrusal ilişkili olabilirler.
- ABİ'yi tahmin etmek üzere kullanılan bir örneklemdeki X'ler yüksek bir çoklueşdoğrusallık gösterir ise bunların Y üzerindeki tekil etkilerini ayırmak zorlaşır.
- Kısaca eldeki örneklem tüm X'leri çözümlemeye katmaya yetecek kadar zengin olmayabilir.
- Örneklemin yeterliliği sorununa örnek olarak aşağıda verilen tüketim-gelir örneğini ele alalım:

$$\text{Tüketim} = \beta_1 + \beta_2\text{Gelir} + \beta_3\text{Servet} + u_i$$

- İktisat kuramına göre gelir ve servet, tüketim harcamalarını açıklamada önemli iki değişkendir.
- Ancak veriler derlendiğinde bu iki değişken tam olmasa bile yüksek ilişkili çıkar.

- Diğer bir deyişle, gelir ve servetin tüketim harcamaları üzerindeki etkilerini örneklemde ayırmak zor olabilir.
- Bu ayrımı yapabilmek için ise geliri az ama serveti çok olan ve geliri çok ama serveti az olan kimselerin yeterli sayıda örneklem gözlemini edinebilmek gereklidir.
- Kesit verilerinde bunu sağlamak mümkün olabilse de toplu zaman serilerinde buna erişmek neredeyse imkansızlaşır.

3.2.2 Uygulamaya İlişkin Sonuçlar

Tama yakın çoklueşdoğrusallık durumlarında, uygulamada şu sonuçlarla karşılaşılabilir:

- SEK tahmincileri, EDYT olmalarına karşı yüksek varyans ve kovaryanslıdırlar.
- Yüksek varyanslar nedeniyle güven aralıkları geniş olma eğilimindedir.
- Geniş güven aralıkları ise katsayı tahminlerine ilişkin sıfır önsavlarının reddedilememesine ve birçok t oranının istatistiksel olarak anlamlı olmamasına yol açar.
- Bir ya da daha çok katsayının anlamlı olmamasına karşın bütünün yakışma iyiliğinin ölçüsü R^2 yüksek olabilir.
- SEK tahminleri *"sağlam"* (robust) olmayabilirler. Diğer bir deyişle, verilerdeki küçük değişmelere duyarlı olabilirler.

Yüksek Varyans ve Kovaryans Sorunu

- Yüksek varyans ve kovaryans sorununu görebilmek için üçlü bağlanıma ait şu ilişkileri anımsayalım:

$$
\begin{aligned}
\text{var}(\hat{\beta}_2) &= \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)} \\
\text{var}(\hat{\beta}_3) &= \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)} \\
\text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) &= \frac{-r_{23}\sigma^2}{(1-r_{23}^2)\sqrt{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2}}
\end{aligned}
$$

- Buradaki r_{23} terimi X_2 ile X_3 arasındaki ilinti katsayısıdır.
- Eşdoğrusallık düzeyi yükselirken, diğer bir deyişle r_{23} 1'e yaklaşırken, iki tahmincinin varyanslarının artarak sonsuza yaklaştığına dikkat ediniz.
- Çoklueşdoğrusallık altında varyans ve kovaryansların büyüme hızını görmek için *"varyans şişme çarpanı"* (variance inflating factor) kavramından yararlanılabilir:

$$\text{VŞÇ} = \frac{1}{(1 - r_{23}^2)}$$

- Yukarıdaki formüle göre r_{23} 1'e yaklaşırken VŞÇ değeri de sonsuza yakınsamaktadır.
- VŞÇ tanımı kullanılarak $\hat{\beta}_2$ ve $\hat{\beta}_3$'nın varyansları şöyle gösterilebilir:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}_2) &= \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2}\text{VŞÇ} \\ \text{var}(\hat{\beta}_3) &= \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2}\text{VŞÇ} \end{aligned}$$

- r_{23} artarken varyans ve kovaryansların büyümelerine ilişkin bir örnek olarak, şu çizelgeyi inceleyelim:

Çizelge: r_{23}'teki Artışın Etkisi

r_{23} Değeri	VŞÇ	var$(\hat{\beta}_2)$	cov$(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$
0,00	1,00	$\times$ 1	0
0,50	1,33	$\times$ 1,33	$\times$ 0,67
0,70	1,96	$\times$ 1,96	$\times$ 1,37
0,80	2,78	$\times$ 2,78	$\times$ 2,22
0,90	5,76	$\times$ 5,76	$\times$ 4,73
0,95	10,26	$\times$ 10,26	$\times$ 9,74
0,97	16,92	$\times$ 16,92	$\times$ 16,41
0,99	50,25	$\times$ 50,25	$\times$ 49,75
0,995	100,00	$\times$ 100,00	$\times$ 99,50
0,999	500,00	$\times$ 500,00	$\times$ 499,50

- Çizelgede görüldüğü gibi, yüksek bir ölçünlü hata anakütle katsayılarının güven aralıklarının geniş olmasına neden olmaktadır.
- Örnek olarak $r_{23} = 0{,}95$'ken β_2'nin güven aralığı da $r_{23} = 0$ durumuna oranla $\sqrt{10{,}26}$ ya da yaklaşık 3 kat büyüktür.

- Ayrıca, tahmin edilen ölçünlü hatalardaki artış t değerlerini de küçültmektedir.
- Bu yüzden anakütleye ait gerçek katsayının sıfır olduğuna ilişkin varsayımlar daha az reddedilir.
- Son olarak, katsayılar istatistiksel olarak anlamlı olmasa bile kovaryansın yüksek olmasından dolayı R^2 de yüksek, örnek olarak 0,90'ın üstünde olabilir.
- Demek ki anlamlı olmayan t değerleriyle birlikte görülen yüksek bir R^2, çoklueşdoğrusallığın belirtilerinden biridir.

Küçük Değişmelere Duyarlılık Sorunu

- Çoklueşdoğrusallık durumunda, bağlanım tahminleri ve bunların ölçünlü hataları verilerdeki küçük değişmelere yüksek duyarlılık gösterirler.
- Bunu görmek için şu iki varsayımsal veri setine bakalım:

Y	X_2	X_3
1	2	4
2	0	2
3	4	12
4	6	0
5	8	16

Y	X_2	X_3
1	2	4
2	0	2
3	4	0
4	6	12
5	8	16

- İki veri seti arasındaki tek fark X_3'ün üçüncü ve dördüncü gözlemlerinin yer değiştirmiş olmasıdır.
- Birinci veri setine dayanarak şu sonuçlar bulunur:

$$\begin{array}{lllll}
\hat{Y}_i = & 1{,}1939 & +\,0{,}4463\,X_{2i} & +\,0{,}0030\,X_{3i} & \\
\text{öh} & (0{,}7737) & (0{,}1848) & (0{,}0851) & \\
t & (1{,}5431) & (2{,}4151) & (0{,}0358) & R^2 = 0{,}8101 \\
r_{23} = & 0{,}5523 & & \multicolumn{2}{l}{\text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = -0{,}0087}
\end{array}$$

- İkinci veri seti ise aşağıdaki bağlanım bulgularını verir:

$$\begin{array}{lllll}
\hat{Y}_i = & 1{,}2108 & +\,0{,}4014\,X_{2i} & +\,0{,}0270\,X_{3i} & \\
\text{öh} & (0{,}7480) & (0{,}2721) & (0{,}1252) & \\
t & (1{,}6187) & (1{,}4752) & (0{,}2158) & R^2 = 0{,}8143 \\
r_{23} = & 0{,}8285 & & \multicolumn{2}{l}{\text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = -0{,}0282}
\end{array}$$

- Görüldüğü gibi sonuçlar önemli farklılıklar sergilemektedir.

3.2.3 Açıklayıcı Örnek

- Çoklueşdoğrusallığa bir diğer örnek olarak, Türkiye'nin farklı illerinde faaliyet gösteren şehirlerarası otobüs firma sayılarını inceleyen aşağıdaki modeli ele alalım.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- Burada
  Y ilde faaliyet gösteren otobüs firma sayısını (adet),
  $X2$ ildeki toplam otomobil sayısı (bin adet),
  $X3$ ise ildeki yetişkin nüfusu (milyon kişi)
  göstermektedir.

- *Dikkat:* İldeki nüfus ile otomobil sayısı arasında yüksek bir eşdoğrusallık gözleneceği açıktır.

- Otobüs firmalarının otomobil sayıları ve nüfus ile olan ilişkisinin doğrusal olduğunu varsayarsak şunu buluruz:

$$\begin{array}{lllll} \hat{Y}_i = & 26{,}6672 & +\ 0{,}1859\ X_{2i} & -\ 1{,}0990\ X_{3i} & \\ \text{öh} & (3{,}7763) & (0{,}0693) & (14{,}5375) & \\ t & (7{,}0617) & (2{,}6808) & (-0{,}0756) & R^2 = 0{,}7455 \end{array}$$

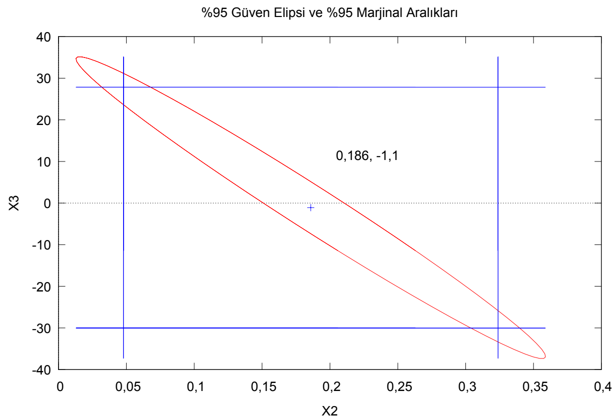
- Sonuçlar, otomobiller ve nüfusun birlikte firma sayılarındaki değişimin yaklaşık %75'ini açıkladığını göstermektedir.

- Diğer yandan, nüfusun eğim katsayısı istatistiksel olarak anlamlı değildir ve üstelik işareti de yanlıştır.

- Ayrıca, $\beta_2 = \beta_3 = 0$ önsavını sınamak için bir ortak güven aralığı belirlendiğinde bu önsav reddedilmez.

- Bunu görmek için bildik F sınamasına başvurulabilir.

- F sınaması yerine X_2 ile X_3'ün güven elipsinin 0 noktasını içerip içermediğine de bakılabilir.



- Güven elipsinin doğruyu andıran şeklinin X_2 ile X_3 arasında tama yakın bir eşdoğrusallığı gösterdiğine dikkat ediniz.

- Çözümlemeyi bir adım ileriye götürür ve X_3'ün X_2'ye göre bağlanımını hesaplarsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\begin{array}{llll} \hat{X}_{3i} = & 0{,}1620 & +\,0{,}0047\ X_{2i} & \\ \text{öh} & (0{,}0228) & (9{,}25e\text{-}05) & \\ t & (7{,}0913) & (50{,}7795) & r^2 = 0{,}9703 \end{array}$$

- Buna göre X_3 ile X_2 arasında oldukça yüksek bir eşdoğrusallık bulunmaktadır.

- Ayrıca Y'nin X_2 ve X_3'e göre ayrı ayrı ikili bağlanımlarını alacak olursak, eğim katsayılarının işaretlerinin doğru ve anlamlılık düzeylerinin de yüksek olduğunu görürüz.

- Bu da gösterir ki yüksek çoklueşdoğrusallık gösteren X değişkenlerinden birini modelden çıkartmak, çoğu zaman diğer(ler)inin istatistiksel olarak anlamlı çıkmasını sağlar.

3.3 Çoklueşdoğrusallığı Saptamak ve Düzeltmek

3.3.1 Var Olup Olmadığını Anlamak

Bir bağlanımda çoklueşdoğrusallığın varlığını anlama konusu ile ilgili olarak şu noktalara dikkat edilmelidir:

- Çoklueşdoğrusallık nitelik değil nicelik sorunudur. Anlamlı bir ayrım çoklueşdoğrusallığın çeşitli dereceleri arasında yapılmalıdır.
- Çoklueşdoğrusallık örneklemin bir özelliği olduğu için çoklueşdoğrusallığa ilişkin bir sınama yapılamaz. Ancak derecesi ölçülebilir.
- Çoklueşdoğrusallığın var olup olmadığını anlamak ve eğer varsa derecesini ölçmek için tek bir yöntem yoktur. Bunun yerine izlenebilecek birkaç gevşek kural vardır.

Çoklueşdoğrusallığın var olup olmadığını anlamak için kural olarak yararlanılabilecek bazı belirtiler şunlardır:

1. Yüksek R^2'ye karşı anlamlı olmayan t oranları
2. Değişken çiftleri arasında yüksek ilinti
3. Yüksek dereceli kısmi ilintilerin yüksek olması
4. Yardımcı bağlanımlarda görülen güçlü ilişkiler
5. Düşük özdeğerler ya da yüksek koşul endeksi değeri
6. Yüksek varyans şişme çarpanları

Kural 1: Yüksek R^2'ye karşı anlamlı olmayan t oranları
Kısmi eğim katsayıları tekil olarak sıfırdan farklı değilken R^2 değerinin yüksek (örneğin 0,8 ve üzeri) bulunması.

- Bu klasik belirtinin kötü yanı aşırı güçlü olmasıdır.
- Diğer bir deyişle, bu tanı ancak X'lerin Y üzerindeki tüm etkileri birbirinden ayırt edilemeyecek noktadaysa çoklueşdoğrusallığı zararlı sayar.
- Öyleyse bu durum çoklueşdoğrusallığın varlığı için yeterli ama gerekli değildir.

Kural 2: Değişken çiftleri arasında yüksek ilinti
İki açıklayıcı değişken arasındaki ilinti katsayısının 0,8 gibi yüksek bir değer olması.

- Bu ölçütteki sorun ise yalnızca sıfırıncı dereceden ilintilere bakmanın tek başına yeterli olmamasıdır.
- İkiden fazla açıklayıcı değişken olması durumunda, basit ilintiler tekil olarak düşük (örneğin 0,5 ve altı) olsa bile çoklueşdoğrusallık ciddi derecede yüksek olabilir.

Kural 3: Yüksek dereceli kısmi ilintiler
Sıfırıncı dereceden ilintilere güven sorunu nedeniyle bakılan yüksek dereceli kısmi ilinti katsayılarının yüksek çıkması.

- Örnek olarak Y'nin X_2, X_3, X_4'e göre bağlanımında yüksek bir $R^2_{1.234}$ ama düşük $r^2_{12.34}$, $r^2_{13.24}$, $r^2_{14.23}$ değerleri bulmak.
- Böyle bir durum; X_2, X_3 ve X_4'ün kendi aralarında yüksek ilintili olduğu ve dolayısıyla bunlardan en az birinin gereksiz olduğu izlenimini verir.
- Çoklueşdoğrusallık bir ya da daha çok değişkenin diğer değişkenlerin tam ya da tama yakın bir doğrusal bileşimi demek olduğu için, çok karmaşık şekillerde oluşabilir.
- Dolayısıyla kısmi ilintileri incelemek yararlıdır ama bu da yanılmaz bir gösterge değildir.

Kural 4: Yardımcı bağlanımlarda görülen güçlü ilişkiler
Hangi X'in diğer X'ler ile ilişkili olduğunu bulmak amacıyla her bir X_i değişkeninin diğerlerine göre bağlanımını tahmin etmek ve buna karşılık gelen R^2_i değerini hesaplamak.

- Bu bağlanımlara *"yardımcı"* (auxiliary) bağlanım denir.
- Örnek olarak, $X_{2i} = a_1 + a_3X_{3i} + a_4X_{4i} + \cdots + a_kX_{ki} + u_i$ bağlanımından $R^2_{X_2}$ elde edilir.
- Daha sonra (k-2) ve (n-k+1) sd ile F dağılımına uyan şu istatistik hesaplanır:

$$F_i = \frac{R^2_{x_i.x_2x_3\ldots x_k}/(k-2)}{(1-R^2_{x_i.x_2x_3\ldots x_k})/(n-k+1)}$$

- Bulunan F_i eğer kritik değeri aşıyorsa, X_{2i}'nin diğer X'lerle çoklueşdoğrusal olduğu önsavı reddedilmez.
- Yardımcı bağlanım yönteminde eğer hesaplanan bir F_i anlamlıysa, ilgili X_i'nin çıkartılıp çıkartılmayacağına ayrıca karar vermek gereklidir.
- Çok sayıda karmaşık doğrusal ilişki varsa karşılıklı ilişkileri saptamak güç olacağından, bu yöntem pek yararlı olmaz.
- Bütün R_i^2'leri tek tek sınamaya almaşık olarak *"Klein'ın başparmak kuralı"* (Klein's rule of thumb) da uygulanabilir.
- Bu kurala göre bir yardımcı bağlanımdan elde edilen R^2 bütünün R^2'sinden büyükse, çoklueşdoğrusallık dikkate alınmaya değecek kadar yüksek demektir.
- Diğer kurallar gibi bu kural da dikkatli kullanılmalıdır.

Kural 5: Düşük özdeğerler ya da yüksek koşul endeksi değeri
Doğrusala yakın bağımlılıkların bir işareti olarak bir değişkene ait *"özdeğer"* (eigen value) büyüklüğünün düşük olması.

- Ekonometri yazılımları ile kolayca bulunabilen özdeğerler kullanılarak *"koşul sayısı"* (condition number) k ve *"koşul endeksi"* (condition index) KE değerleri şöyle hesaplanır:

$$k = \frac{\text{En Yüksek Özdeğer}}{\text{En Düşük Özdeğer}}, \qquad KE = \sqrt{k}$$

- Çoklueşdoğrusallık, k eğer 100 ile 1000 arasındaysa orta ya da güçlü derecededir. Eğer 1000'i aşıyorsa da ciddidir.
- Almaşık olarak, çoklueşdoğrusallık eğer KE 10 ile 30 arasındaysa orta ya da güçlüdür. 30'u aşıyorsa da ciddidir.
- Bu gevşek kural da diğerleri gibi dikkatli kullanılmalıdır.

Kural 6: Yüksek varyans şişme çarpanları
X_i'nin diğer değişkenlerle ilişkisi artarken *"varyans şişme çarpanı"* (variance inflation factor) ya da kısaca *"VŞÇ"* (VIF) değerinin de artmasının bir ölçüt olarak kullanılması.

- k değişkenli modeldeki bir kısmi bağlanım katsayısının varyansı, VŞÇ cinsinden şu şekilde gösterilebilir:

$$\text{var}(\hat{\beta}_i) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\left(\frac{1}{1-R_i^2}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\text{VŞÇ}_i$$

- $\hat{\beta}_i$ ve R_i^2 değerleri burada X_i'nin kısmi bağlanım ve belirleme katsayılarıdır. VŞÇ_i ise varyans şişme çarpanıdır.
- Bir başparmak kuralı olarak, bir değişkenin VŞÇ değeri 10'dan büyükse çoklueşdoğrusallığı da yüksektir denebilir.
- Bazı ekonometriciler VŞÇ yerine almaşık olarak *"hoşgörü"* (tolerance), kısaca *"HOŞ"* (TOL) değerini kullanırlar:

  Hoşgörü

$$\text{HOŞ}_i = \frac{1}{\text{VŞÇ}_i} = (1-R_i^2)$$

- Buna göre X_i diğer değişkenlerle tam ilişkiliyse $\text{HOŞ}_i = 0$, ilişkisizse de $\text{HOŞ}_i = 1$ olur.
- $\text{var}(\hat{\beta}_i)$ tanımından, yüksek bir HOŞ_i değerinin düşük bir σ^2 ya da yüksek bir $\sum x_i^2$ ile dengelenebildiği görülmektedir.
- Dolayısıyla küçük bir HOŞ (ya da büyük bir VŞÇ) yüksek ölçünlü hatalar bulmak için ne yeterli ne de gereklidir.

3.3.2 Çoklueşdoğrusallığı Düzeltici Önlemler

Çoklueşdoğrusallığın nasıl giderileceğine ilişkin kesin kurallar yoktur. Uygulanabilecek gevşek kurallardan bazıları şunlardır:

1. Önsel bilgilere başvurmak
2. Havuzlamalı verilerden yararlanmak
3. Bazı değişkenleri bırakmak
4. Verileri dönüştürmek
5. Ek ya da yeni veriler derlemek

6. Diğer iyileştirici önlemler

Yöntem 1: Önsel bilgilere başvurmak
Çoklueşdoğrusallık sorununu gidermek için, modele önsel bilgilere dayalı sınırlamalar getirilebilir.

- Aşağıdaki modeli ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- Burada Y_i tüketimi, X_{2i} geliri, X_{3i} de serveti göstermektedir. Gelir ile servet yüksek derecede eşdoğrusaldır.
- $\beta_3 = 0{,}1\beta_2$ olduğunu *"önsel"* (a priori) olarak bildiğimizi varsayalım. Bundan yararlanarak şunu elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + 0{,}1\beta_2 X_{3i} + u_i \\ &= \beta_1 + \beta_2 X_{4i} + u_i \end{aligned}$$

- Burada $X_{4i} = X_{2i} + 0{,}1X_{3i}$'dir.
- $\hat{\beta}_2$ bir kez bulunduktan sonra $\hat{\beta}_3$ da β_2 ile β_3 arasında var olduğu düşünülen ilişkiden kolayca bulunabilir.
- Önsel bilgiden yararlanabilmek için katsayılar arasındaki ilişkiye ait böyle bir bilginin öncelikle var olması gereklidir.
- Önsel bir bilgi daha önceki görgül çalışmalardan ya da modelin gerisinde yatan kuramdan gelebilir.
- Örnek olarak, Cobb-Douglas türü üretim işlevine dayanan bir modelde ölçeğe göre sabit getiri olması bekleniyorsa, $\beta_1 + \beta_2 = 1$ sınırlaması geçerli olur.
- Diğer yandan, modele sınırlama getirmek konusunda dikkatli olunmalıdır.
- Öncelikli amacımızın kuramın ileri sürdüğü önsel bilgileri modele zorla sokmak değil, bu beklentilerin kendisini sınamak olduğunu unutmamalıyız.

Yöntem 2: Havuzlamalı verilerden yararlanmak
Dışsal ya da önsel bilginin bir biçimi de *"havuzlamalı veriler"* (pooled data) kullanmak, diğer bir deyişle yatay kesit ve zaman serisi verilerini bir araya getirmektir.

- Aşağıdaki bağlanımı ele alalım:

$$\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 \ln P_t + \beta_3 \ln I_t + u_t$$

- Burada Y satış sayısını, P ortalama fiyatı, I geliri ve t ise zamanı göstermektedir.
- Zaman serisi verilerinde fiyat ve gelir değişkenleri yüksek bir eşdoğrusallık gösterme eğilimindedir.
- Diğer yandan, zaman içerisinde tek bir noktada derlenen kesit verilerinde fiyat çok değişikliğe uğramadığı için bu sorunla fazla karşılaşılmaz.
- Yatay kesit verileri kullanılarak β_3'ün güvenilir bir tahmini bulunduktan sonra, zaman serisi bağlanımı şöyle yazılır:

$$Y_t^* = \beta_1 + \beta_2 \ln P_t + u_t$$

- Burada $Y^* = \ln Y - \beta_3 \ln I$ dönüştürmesi kullanılmıştır.
- Gelir etkisinden arındırmalı Y değerleri kullanılarak, artık β_2 tahmin edilebilir.
- Yatay kesit ve zaman serisi verilerini bir araya getirmenin bazı yorum sorunları doğurabileceği unutulmamalıdır.
- Örnek olarak, burada kesit verileriyle bulunan esnekliğin zaman serisiyle bulunan değere eşit olduğu örtük olarak varsayılmaktadır.

Yöntem 3: Bazı değişkenleri bırakmak
Ciddi bir çoklueşdoğrusallıkla karşılaşınca izlenebilecek bir diğer yol da değişkenlerden bir ya da birkaçını bırakmaktır.

- Diğer yandan, modelden değişken çıkartmak bir model *"belirtim yanlılığı"* (specification bias) ya da *"belirtim hatası"* (specification error) sorununa yol açabilir.
- Örnek olarak, doğru model aşağıdaki gibi olsun:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- Yanlışlıkla aşağıdaki modeli yakıştırmış olalım:

$$Y_i = b_1 + b_{12} X_{2i} + \hat{u}_i$$

- Bu durumda şöyle bir yanlılık ortaya çıkar:

$$E(b_{12}) = \beta_2 + \beta_3 b_{32}$$

- b_{32} burada X_3'ün X_2'ye göre bağlanımındaki eğimdir.
- Örnekte gösterilen b_{12}, β_2'nin *"yanlı"* (biased) tahmincisidir.
- Diğer bir deyişle b_{12} katsayısı, $\beta_3 b_{32}$ çarpımının işaretine bağlı olarak β_2'yi düşük ya da yüksek tahmin eder.
- Bu noktada, tama yakın çoklueşdoğrusallık varken bile SEK tahmincilerinin EDYT olduğunu anımsayalım.
- Çoklueşdoğrusallık modeldeki anakütle katsayılarının keskin olarak tahmin edilmesini engellemektedir.
- Bir değişkeni çıkartmak ise yanlılığa yol açarak anakütle katsayılarının gerçek değeri konusunda bizi yanıltabilir.
- Demek ki bazı durumlarda ilaç hastalıktan daha kötü olabilmektedir.

Yöntem 4: Verileri dönüştürmek
Çoklueşdoğrusallık, verileri dönüştürerek de yok edilebilir.

- Uygulamada sıkça kullanılan veri dönüştürme yollarından biri, *"oran dönüşümü"* (ratio transformation) yöntemidir.
- Aşağıdaki modeli ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- Burada Y_i tüketim, X_{2i} milli gelir ve X_{3i} de toplam nüfustur.
- Toplam gelirin nüfus ile eşdoğrusallık göstermesi sorunu, modelin kişi başına olarak belirtilmesiyle çözülebilir:

$$\frac{Y_i}{X_{3i}} = \beta_1 \left(\frac{1}{X_{3i}}\right) + \beta_2 \left(\frac{X_{2i}}{X_{3i}}\right) + \beta_3 + \left(\frac{u_i}{X_{3i}}\right)$$

- Buradaki sorunsa ilk bağlanımdaki u_i terimi sabit varyansla dağılıyor olsa bile dönüştürmeli bağlanımındaki u_i/X_{3i}'nin *"farklıserpilimsellik"* (heteroscedasticity) göstermesidir.

- Bir diğer dönüştürme yöntemi olarak şu modeli ele alalım:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

- Buradaki gelir (X_{2t}) ve servetin (X_{3t}) eşdoğrusallıklarının bir nedeni, bunların zaman içinde birlikte değişmeleridir.
- Zamanın ilk noktası t isteğe bağlı olduğu için şu yazılabilir:

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{2,t-1} + \beta_3 X_{3,t-1} + u_{t-1}$$

- Yukarıdaki ikinci denklemi birinciden çıkartırsak, modeli *"birinci fark"* (first difference) biçiminde yazmış oluruz:

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta_2(X_{2t} - X_{2,t-1}) + \beta_3(X_{3t} - X_{3,t-1}) + v_t$$

- Bu işlem eşdoğrusallık sorununu azaltır çünkü X_2 ile X_3'ün farklarının eşdoğrusal olması için önsel bir neden yoktur.
- Ancak birinci fark dönüşümü gözlemlerin sıralı olmadığı yatay kesit verileri için uygun değildir.
- Ayrıca, fark alma nedeniyle baştaki gözlem yitirildiği için serbestlik derecesi de bir azalır.

Yöntem 5: Yeni veriler derlemek
Çoklueşdoğrusallık bir örneklem özelliği olduğuna göre, daha büyük ya da aynı değişkenlerin yer aldığı farklı bir örneklemde daha az ciddi olabilir.

- Üç değişkenli model için varyans formülünü anımsayalım:

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 (1 - r_{23}^2)}$$

- Görüldüğü gibi, örneklem büyürken $\sum x_{2i}^2$ de büyümekte ve buna koşut olarak azalan var$(\hat{\beta}_2)$ değeri β_2'nin daha kesin tahmin edilmesini sağlamaktadır.
- Ancak, iktisadi çalışmalarda ek veriler bulabilmek ya da "daha iyi" veriler derleyebilmek her zaman kolay değildir.

Yöntem 6: Diğer düzeltici önlemler
Çoklueşdoğrusallığı gidermeye yönelik başka dönüştürme ve tahmin yöntemleri de bulunmaktadır.

- Örnek olarak, açıklayıcı değişkenlerin çeşitli üstlerle girdiği *"çokterimli"* (polynomial) modellerde, çoklueşdoğrusallığı azaltmanın bir yolu X'leri sapmalar biçiminde kullanmaktır.

- Bunların dışında, çoklueşdoğrusallık sorununu çözmede
  "etmen çözümlemesi" (factor analysis),
  "baş bileşenler" (principal components),
  "sırt bağlanımı" (ridge regression)
  gibi yöntemler de sıkça kullanılır.

- Bunlar daha ileri düzeydeki bir tartışmanın konusudur.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 10* “Multicollinearity: What Happens if the Regressors Are Correlated?” okunacak.

Önümüzdeki Ders
Farklıserpilimsellik

Bölüm 4

Farklıserpilimsellik

4.1 Farklıserpilimselliğin Niteliği

4.1.1 Nedenleri ve Sonuçları

Klasik doğrusal bağlanım modelinin önemli bir varsayımı, hata teriminin sabit varyans ile dağılmakta olduğudur. Bu varsayım her zaman geçerli olmayabilir. Bu bölümde şu sorulara yanıt arayacağız:

1. Farklıserpilimselliğin niteliği nedir?
2. Uygulamada doğurduğu sonuçlar nelerdir?
3. Varlığı nasıl anlaşılabilir?
4. Düzeltmek için ne gibi önlemler alınabilir?

- *"Aynıserpilimsellik"* (homoscedasticity) varsayımına göre verili X_i açıklayıcı değişkenlerine bağlı olarak Y_i'nin koşullu varyansı sabittir:

$$E(u_i^2) = \sigma^2 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

- *"Farklıserpilimsellik"* (heteroscedasticity) durumunda ise X_i değiştikçe Y_i'nin koşullu varyansı da değişir:

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2$$

- Farklıserpilimselliğe bir örnek olarak tasarrufların varyansının gelirle birlikte artmasını verebiliriz.
- Yüksek gelirli ailelerin tasarrufları, düşük gelirli ailelere oranla hem ortalama olarak daha çoktur hem de değişirliği daha fazladır.

Farklıserpilimselliğin Nedenleri

Hata terimi varyansının değişken olma nedenlerinden bazıları şunlardır:

1. *"Hata-öğrenme"* (error-learning) modellerine göre insanlar bazı konuları öğrendikçe daha az hata yaparlar. Buna göre σ^2'nin de zamanla küçülmesi beklenir. Örnek olarak, daktilo kullanma süresi arttıkça hem daktilo hataları hem de bunların varyansı azalır.

2. Gelir düzeyi arttıkça gelirin harcanabileceği seçenekler de genişler. Böylece, gelir düzeyi ile birlikte hem harcamaların hem de bunların varyansının artması beklenir.

3. Zaman içerisinde veri derleme tekniklerinin gelişmesine koşut olarak σ_i^2 de düşebilir.

4. Farklıserpilimsellik, *"dışadüşen"* (outlier) gözlemlerin bir sonucu olarak da ortaya çıkabilir. Böyle gözlemlerin alınması ya da bırakılması, özellikle de örneklem küçükken sonuçları önemli ölçüde değiştirebilir.

5. Farklıserpilimselliğin bir diğer nedeni model belirtim hatasıdır. Özellikle de önemli bir değişkenin modelden çıkartılması farklıserpilimselliğe yol açabilir.

6. Farklıserpilimsellik sorunu yatay kesit verilerinde zaman serisi verilerine oranla daha fazla görülebilmektedir. Bunun nedeni, zaman serilerinde değişkenlerin zaman içerisinde yakın büyüklüklerde olma eğilimidir.

Farklıserpilimselliğin SEK Tahminlerine Etkisi

- σ_i^2 şeklindeki farklıserpilimsellik altında SEK tahmincilerinin varyanslarının ne şekilde etkileneceğini görmek için, iki değişkenli modeli ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

Aynıserpilimsellik durumunda varyans formülü şöyledir:

Aynıserpilimsellik

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

Bu da farklıserpilimsellik altındaki formülden farklıdır:

Farklıserpilimsellik

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{(\sum x_i^2)^2}$$

- Her bir i için, $\sigma_i^2 = \sigma^2$ olması durumunda iki formülün aynı olacağına dikkat ediniz.
- KDBM'nin tüm varsayımları geçerli olduğu zaman SEK tahmincisi $\hat{\beta}_2$'nın EDYT olduğunu anımsayalım.
- $\hat{\beta}_2$ tahmincisinin aynıserpilimselliğin geçerli olmadığı durumda bile doğrusal ve yansız olduğu gösterilebilir.
- Ancak, böyle bir durumda SEK tahmincileri artık "en iyi" ya da enaz varyanslı olma özelliklerini kaybederler.
- Öyleyse, farklıserpilimsellik durumunda tahmincilerin EDYT olabilmesi için SEK'ten ayrı bir yöntem izlemek gerekir.

4.1.2 Genellemeli En Küçük Kareler

- X_i'nin farklı düzeylerinde farklıserpilimsellik gözleniyorsa, tahmin sürecinde bu bilgiden yararlanmak gerekir.
- Örnek olarak, düşük gelir sınıflarına ait harcamalar daha düşük varyanslı ise bu gruplardan gelen gözlemlere daha çok ağırlık verilmesi istenir.
- Bunun nedeni, düşük varyanslı grupların kendi ortalamaları çevresine daha yakın dağılarak ABİ'nin daha doğru tahmin edilmesini sağlamalarıdır.
- SEK yöntemi, tüm gözlemlere eşit ağırlık verdiği için farklıserpilimsellik durumunda etkin tahminciler üretemez.
- Varyanstaki değişim bilgisinden yararlanan ve bu nedenle tahmincileri EDYT olan yöntem ise *"genellemeli en küçük kareler"* (generalized least squares) ya da kısaca *"GEK"* (GLS) yöntemidir.
- GEK'in farklıserpilimsellik bilgisini nasıl kullandığını görmek için iki değişkenli modeli şöyle yazalım:

$$Y_i = \beta_1 X_{0i} + \beta_2 X_i + u_i$$

- Burada her bir i için $X_{0i} = 1$'dir.

- Farklıserpilimsel varyanslar (σ_i^2) biliniyor olsun. Yukarıdaki denklemi σ_i'ye bölersek şunu elde ederiz:

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \beta_1 \left(\frac{X_{0i}}{\sigma_i}\right) + \beta_2 \left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right) + \left(\frac{u_i}{\sigma_i}\right)$$

- Bunu da gösterim kolaylığı bakımından şöyle yazabiliriz:

$$Y_i^* = \beta_1^* X_{0i}^* + \beta_2^* X_i^* + u_i^*$$

- Buradaki yıldız işaretli dönüştürülmüş değişkenler, baştaki değişkenlerin σ_i'ye bölünmüş halleridir. İkinci modele ait katsayılar farklı olacağı için β'lar da yıldız ile gösterilmiştir.
- Özgün modeli neden dönüştürdüğümüzü görmek için hata terimi u_i^*'ın şu özelliğine dikkat edelim:

$$\begin{aligned}
\text{var}(u_i^*) = E(u_i^*)^2 &= E\left(\frac{u_i}{\sigma_i}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\sigma_i^2} E(u_i^2) \qquad (\sigma_i^2 \text{ bilindiği için}) \\
&= \frac{1}{\sigma_i^2}(\sigma_i^2) \;=\; 1
\end{aligned}$$

- Demek ki dönüştürülen hata terimi u_i^*'ın varyansı sabittir ve 1'e eşittir.
- Görüldüğü gibi GEK, KDBM varsayımlarını sağlayan dönüştürülmüş değişkenlere uygulanan SEK yöntemidir.
- Uygulamada, β_1^* ve β_2^*'ı tahmin etmek için dönüştürülen modelin ÖBİ'si kullanılır:

$$Y_i^* = \hat{\beta}_1^* X_{0i}^* + \hat{\beta}_2^* X_i^* + \hat{u}_i{}^*$$

- Daha sonra hata kareleri toplamı $\sum \hat{u}_i{}^{2*}$ enazlanır.
- GEK tahmincisi $\hat{\beta}_2^*$ ve bunun varyansı var$(\hat{\beta}_2^*)$ şöyledir:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_2^* &= \frac{(\sum w_i)(\sum w_i X_i Y_i) - (\sum w_i X_i)(\sum w_i Y_i)}{(\sum w_i)(\sum w_i X_i^2) - (\sum w_i X_i)^2} \\
\text{var}(\hat{\beta}_2^*) &= \frac{\sum w_i}{(\sum w_i)(\sum w_i X_i^2) - (\sum w_i X_i)^2}
\end{aligned}$$

- Burada $w_i = 1/\sigma_i^2$'yi göstermektedir.

SEK ile GEK Arasındaki Fark

- Bilindiği gibi SEK, hata kareleri toplamını enazlar:

$$\sum \hat{u_i}^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2$$

- GEK yöntemi ise aşağıdaki dönüştürmeli hata kareleri toplamını enazlamaktadır:

$$\sum w_i \hat{u_i}^2 = \sum w_i (Y_i - \hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_2^* X_i)^2$$

- Buna göre GEK $w_i = 1/\sigma_i^2$ büyüklüğü ile ağırlıklandırılan kalıntı kareleri toplamını enazlarken, SEK de ağırlıksız ya da eşit ağırlıklı KKT'yi enazlamaktadır.
- GEK'te her gözleme verilen ağırlık σ_i ile ters orantılıdır.
- Elimizdeki yöntem ağırlıklandırmalı bir KKT'yi enazlamaya dayandığına göre *"ağırlıklı en küçük kareler"* (weighted least squares) ya da *"AEK"* (WLS) diye de adlandırılabilir.
- Demek ki AEK, daha genel bir tahmin yöntemi olan GEK'in özel bir durumudur.

4.1.3 Farklıserpilimsellik Altında SEK

Farklıserpilimselliği Göz Önüne Alan SEK

- Farklıserpilimsellik altında SEK tahmini, farklıserpilimselliği göz önüne alarak ya da göz ardı ederek yapılabilir.
- Yapılan tahminler iki şekilde de hatalı ya da yanıltıcı olabilir.
- Farklıserpilimselliği göz önüne alan SEK tahmincisini ele alalım.
- Göstermiş olduğumuz gibi, SEK tahmincisi $\hat{\beta}_2$'nın ve GEK tahmincisi $\hat{\beta}_2^*$'ın her ikisi de yansız tahmincilerdir.
- Ancak enaz varyanslı olan tahminci GEK tahmincisi $\hat{\beta}_2^*$'dır.
- Bu durum SEK tahmincisine dayanan güven aralıklarının gereksiz yere büyük çıkacağı anlamına gelir.
- Demek ki SEK tabanlı anlamlı olmayan bir katsayı, GEK ile hesaplanmış doğru bir güven aralığı kurulursa anlamlı çıkabilir.

Farklıserpilimselliği Göz Ardı Eden SEK

- Farklıserpilimsellik altında, aynıserpilimselliğe ait varyans formülünü kullanmayı sürdürmek ciddi sorunlar yaratabilir.
- $\hat{\beta}_2$'nın varyansının aynıserpilimsellik ve farklıserpilimsellik varsayımı altındaki formüllerini anımsayalım:

  Aynıserpilimsellik

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

  Farklıserpilimsellik

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{(\sum x_i^2)^2}$$

- Farklıserpilimsellik durumunda, yukarıda verilen formüllerden sağdaki soldakinin yanlı bir tahmincisi olur.
- Genellikle bu yanlılığın yukarı doğru mu yoksa aşağı doğru mu olduğu da bilinemez.
- Demek ki farklıserpilimsellik altında bildik sınama sürecini kullanmada ısrar etmek yanıltıcı sonuçlara yol açabilir.

SEK Kullanmanın Sonuçları

- Örnek olarak, Davidson ve MacKinnon'ın yapmış oldukları bir Monte Carlo çalışmasını ele alalım.
- Yazarlar, iki değişkenli bağlanım modelini kullanarak ve $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ve $u_i \sim N(0, X_i^{\alpha})$, diğer bir deyişle hata teriminin açıklayıcı değişken X'in α üssü değeriyle ilişkili olduğu varsayımını yaparak şu sonuçları elde etmişlerdir:

	$\hat{\beta}_1$'nın ölçünlü hatası			$\hat{\beta}_2$'nın ölçünlü hatası		
α	SEK	SEK_{fs}	GEK	SEK	SEK_{fs}	GEK
0,5	0,164	0,134	0,110	0,285	0,277	0,243
1,0	1,142	0,101	0,048	0,246	0,247	0,173
2,0	0,116	0,074	0,0073	0,200	0,220	0,109
3,0	0,100	0,064	0,0013	0,173	0,206	0,056
4,0	0,089	0,059	0,0003	0,154	0,195	0,017

- SEK_{fs} burada farklıserpilimselliği göz önüne alan SEK'tir.

(. . . devam)

- Bulgular, farklıserpilimselliği göz önüne alan SEK_{fs} ve almayan SEK ölçünlü hatalarının GEK'inkilerden yüksek olduğunu, kısaca GEK'in en düşük varyanslı olduğunu göstermektedir.
- Ayrıca, farklıserpilimselliği göz ardı eden yanlı SEK'in varyansı SEK_{fs}'nin varyansından büyük ya da küçük olabilmektedir.
- Buna göre, farklıserpilimsellik durumunda GEK yönteminin üstünlüğü açıktır.
- Ancak GEK'i uygulayabilmek her zaman kolay değildir.

4.2 Farklıserpilimselliği Saptamak

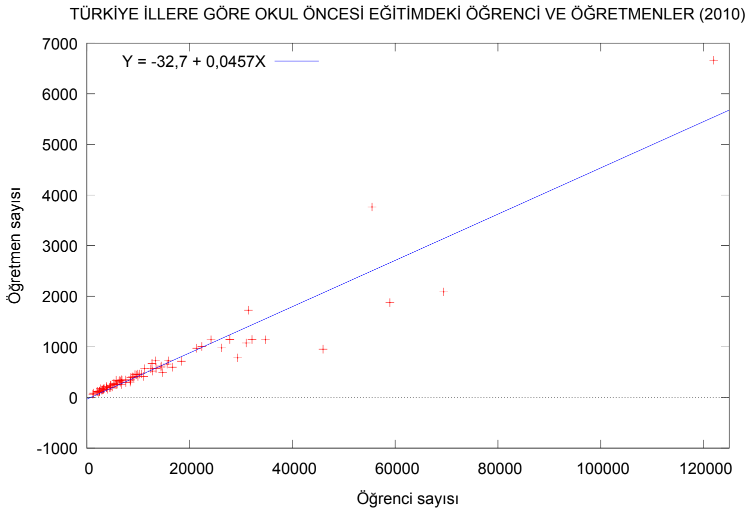
- *"Farklıtürel"* (heterogeneous) birimler içeren yatay kesit verilerinde, farklıserpilimsellik asla sıra dışı değildir.
- Örnek olarak küçük, orta ve büyük firmalar eğer birarada örneklenmişse farklıserpilimsellik genellikle beklenir.
- Belli bir durumda farklıserpilimselliğin varlığını anlamanın kesin bir yolu yoktur. Çeşitli başparmak kuralları vardır.
- Bunun nedeni, σ_i^2'yi bilebilmek için bütün Y anakütlesini bilmenin gerekli olmasıdır.
- Ancak çoğu iktisadi çalışmada belli X değerlerine karşılık tek bir Y örneklem değeri bulunur.
- Bu nedenle, farklıserpilimselliğin varlığını anlamak için kullanılabilecek biçimsel ve biçimsel olmayan yöntemlerin çoğu $\hat{u}_i$ SEK kalıntılarının incelenmesine dayanır.
- Yalnızca $\hat{u}_i$'lar gözlenebildiği için de bunların gerçek u_i'lerin iyi birer tahmincisi oldukları umulur.

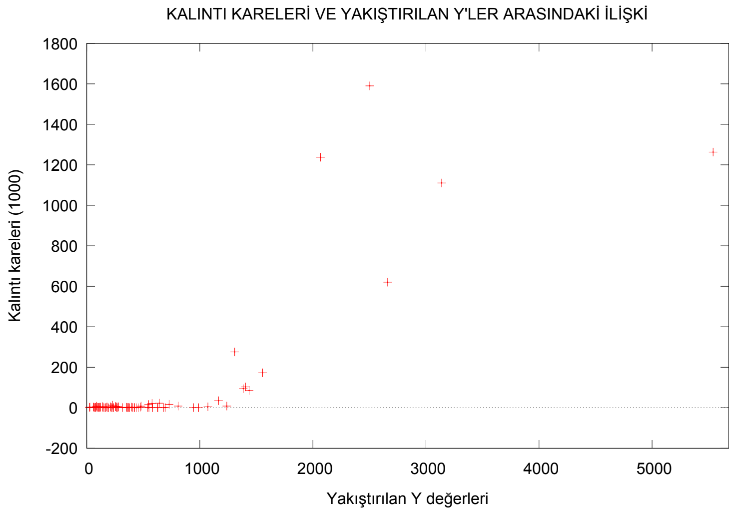
4.2.1 Biçimsel Olmayan Yöntemler

Çizim Yöntemi

- Çoğu durumda farklıserpilimselliği saptamak bir sezgi, eğitimli bir tahmin ya da bir önsel görgül deneyim konusudur.
- Biçimsel bir yöntem olmayan çizim yönteminde, bağlanım çözümlemesi önce aynıserpilimsellik varsayımı ile yapılır.
- Sonra, $\hat{u}_i{}^2$ kalıntı karelerinin düzenli bir görüntü sergileyip sergilemediklerine bakılır.
- Bunun için, $\hat{u}_i{}^2$'lerin $\hat{Y}_i$ ve çeşitli X_i değişkenleri ile ilişkileri çizit üzerinde görüntülenir.
- Eğer örneklem yeterince büyükse, $\hat{u}_i{}^2$'ler u_i^2'lerle aynı şey olmasa da onların yerine kullanılabilirler.

- Eğer bu işlem $\hat{u}_i^{\,2}$'ler ile $\hat{Y}_i$ ya da X_i arasında doğrusal ya da ikinci derece bir ilişki gösterirse, bu bilgi kullanılarak veriler farklıserpilimsellik sergilemeyecek biçimde dönüştürülür.





4.2.2 Biçimsel Yöntemler

Park Sınaması

- R. E. Park (1966), σ_i^2'nin açıklayıcı değişken X_i'nin bir işlevi olduğunu ileri sürerek çizim yöntemini biçimselleştirir.

- Sınama için öne sürülen iki işlev kalıbı şudur:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \sigma^2 X_i^{\beta} e^{v_i} \\ \text{ya da} \quad \ln \sigma_i^2 &= \ln \sigma^2 + \beta \ln X_i + v_i \end{aligned}$$

- Park, σ_i^2 bilinmediği için yerine $\hat{u}_i{}^2$'yi kullanmayı önerir:

$$\begin{aligned} \ln \hat{u}_i{}^2 &= \ln \sigma^2 + \beta \ln X_i + v_i \\ &= \quad \alpha \quad + \beta \ln X_i + v_i \end{aligned}$$

- Demek ki önce farklıserpilimselliğe bakmadan bir bağlanım bulunur. Sonra, kalıntılardan ikinci bağlanım hesaplanır.
- Eğer β anlamlıysa bu farklıserpilimselliğin göstergesidir. Anlamlı değilse, aynıserpilimsellik sıfır önsavı reddedilmez.

Glejser Sınaması

- H. Glejser (1969) tarafından öne sürülmüş olan Glejser sınaması özünde Park sınamasına benzer.
- Glejser, $\hat{u}_i$ kalıntılarının mutlak değerlerini kullanan şu işlev biçimlerini önerir:

$$\begin{aligned} |\hat{u}_i| &= \beta_1 + \beta_2 X_i + v_{1i} \\ |\hat{u}_i| &= \beta_1 + \beta_2 \sqrt{X_i} + v_{2i} \\ |\hat{u}_i| &= \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{X_i} + v_{3i} \\ |\hat{u}_i| &= \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + v_{4i} \\ |\hat{u}_i| &= \sqrt{\beta_1 + \beta_2 X_i} + v_{5i} \\ |\hat{u}_i| &= \sqrt{\beta_1 + \beta_2 X_i^2} + v_{6i} \end{aligned}$$

- v_{ji} $(j = \{1, \ldots, 6\})$ burada hata terimini göstermektedir.
- Görgül olarak çekici görünmelerine karşın Park ve Glejser sınamalarının bazı sorunları da vardır.
- Öncelikle, sınama bağlanımlarında kullanılan hata terimi v_i'nin ortalaması sıfır olmayabilmekte ve bu v_i'ler özilinti ya da farklıserpilimsellik gösterebilmektedir.
- Diğer bir deyişle Park ve Glejser sınamalarının kendileri de SEK varsayımlarını sağlamayabilmektedir.

- Ayrıca, Glejser işlemindeki son iki işlev biçimi katsayılarda doğrusal-dışı olduğundan SEK ile tahmin edilemez.
- Öyleyse uygulamada bu iki sınamanın birer sorgulayıcı yöntem olarak kullanılması daha doğrudur.

Spearman Sıra İlintisi Sınaması

- *"Spearman sıra ilintisi"* (Spearman's rank correlation) şu şekilde tanımlanır:

  Sıra ilintisi

$$r_s = 1 - 6\left[\frac{\sum d_i^2}{n(n^2-1)}\right]$$

- d_i değeri burada i'inci kişi ya da olgunun iki farklı özelliğine verilen sıra numaraları arasındaki farkı göstermektedir.
- n ise sıralanan kişi ya da olgu sayısıdır.
- Örnek olarak, ders çalışma ve sınavlardaki başarı ilintisini bulmak için öğrenciler haftada kaç saat ders çalıştıklarına göre ve sınavda aldıkları puana göre sıraya sokulur. Daha sonra, iki sıralama arasındaki farkın kareleri hesaplanır.

$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ ikili bağlanımını alalım. Farklıserpilimselliği Spearman sıra ilintisi ile sınamak için şu adımlar izlenir:

1. Veriler bağlanıma yakıştırılıp kalıntılar elde edilir.
2. $|\hat{u}_i|$ mutlak değerleri bulunur.
3. Hem $|\hat{u}_i|$ hem de X_i yöneyleri artan ya da azalan bir sıraya dizilir ve Spearman sıra ilinti katsayısı r_s hesaplanır.
4. Anakütle sıra ilintisi $\rho_s = 0$ ve $n > 8$ varsayımları altında, $(n-2)$ sd ile t dağılımına uyan şu istatistik hesaplanır:

$$t = \frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

5. Eğer hesaplanan t değeri kritik t değerinden büyük ise, aynıserpilimsellik sıfır önsavı reddedilir.
6. Bağlanım modeli eğer birden çok X değişkeni içeriyorsa, r_s her bir X için ayrı ayrı hesaplanıp sınanmalıdır.

Goldfeld-Quandt Sınaması

$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ ikili bağlanımını ele alalım. Ayrıca σ_i^2 ve X_i arasında $\sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2$ biçiminde bir ilişki olduğunu da varsayalım. Goldfeld-Quandt sınamasının adımları aşağıdaki gibidir:

1. X_i gözlemleri küçükten büyüğe doğru sıralanır.
2. Ortadaki c sayıda gözlem örneklemden çıkarılır.
3. Kalan $(n - c)$ gözlem ortadan iki eşit öbeğe bölünür.
4. İki öbek ayrı ayrı SEK bağlanımına yakıştırılır, KKT_1 ile KKT_2 elde edilir ve şu oran hesaplanır:
$$F = \frac{\text{KKT}_2/\text{sd}}{\text{KKT}_1/\text{sd}}$$
5. F dağılımına uyan bu istatistiğin pay ve payda sd'si aynıdır ve $[(n-c)/2] - k$'ye eşittir. Eğer hesaplanan değer kritik F'den büyükse, aynıserpilimsellik sıfır önsavı reddedilir.

- Goldfeld-Quandt sınamasında, ortadaki c sayıda gözlemin dışlanma amacı, küçük varyanslı öbek ile büyük varyanslı öbek arasındaki farkı keskinleştirmektir.
- Öyleyse c'nin nasıl seçileceği önemlidir.
- Örneklem büyüklüğü yaklaşık 30 iken c'nin 4 ve örneklem büyüklüğü 60 iken de c'nin 10 olması yeterli sayılmaktadır.
- Modelde birden fazla açıklayıcı değişken var ise, bunlar uygun olduğu düşünülen X'e göre sıralanır ya da sınama her bir X için ayrı ayrı yapılır.

Breusch-Pagan-Godfrey Sınaması

- Goldfeld-Quandt sınamasının bir sakıncası, sonuçların gözlemleri sıralamada kullanılan X değişkeninin seçimine bağlı olmasıdır.
- Bu da Breusch-Pagan-Godfrey sınaması ile giderilebilir.
- Aşağıdaki k değişkenli bağlanım modelini ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

- σ_i^2 hata varyansının, olasılıksal olmayan Z değişkenlerinin doğrusal bir işlevi olduğunu varsayalım:

$$\sigma_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + \cdots + \alpha_m Z_{mi}$$

- Z değişkeni olarak X'lerin tümü ya da birkaçı kullanılabilir.
- Eğer $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_m = 0$ ise $\sigma_i^2 = \alpha_1$ olur.
- Demek ki BPG sınaması, σ_i^2'nin sabit olup olmadığını anlamak için $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_m = 0$ varsayımını sınar.

Breusch-Pagan-Godfrey sınamasının adımları şöyledir:

1. Bağlanım SEK ile tahmin edilir ve kalıntılar elde edilir.
2. σ^2'nin EO tahmincisi $\tilde{\sigma}^2 = \sum \hat{u_i}^2/n$ değeri hesaplanır.
3. $p_i = \hat{u_i}^2/\tilde{\sigma}^2$ değişkeni oluşturulur.
4. p_i'lerin Z'lere göre bağlanımı bulunur:

$$p_i = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + \cdots + \alpha_m Z_{mi} + v_i$$

5. Bağlanım kareleri toplamı (BKT) bulunarak şu hesaplanır:

$$\Theta = (\text{BKT})/2$$

6. u_i'nin normal dağıldığı ve aynıserpilimsellik varsayımı altında ve örneklem büyüklüğü sonsuza doğru artarken, Θ değeri de $(m-1)$ sd ile ki-kare dağılımına uyar.
7. Buna göre, hesaplanan Θ eğer kritik χ^2 değerini aşıyorsa aynıserpilimsellik sıfır önsavı reddedilir.

White Genel Farklıserpilimsellik Sınaması

$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$ üçlü bağlanımını ele alalım. White genel farklıserpilimsellik sınaması şöyle yapılır:

1. Veriler SEK bağlanımına yakıştırılır ve kalıntılar alınır.
2. Aşağıdaki yardımcı bağlanım hesaplanır:

$$\hat{u_i}^2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{3i} + \alpha_4 X_{2i}^2 + \alpha_5 X_{3i}^2 + \alpha_6 X_{2i} X_{3i} + v_i$$

Kısaca kalıntı karelerinin X'ler, X'lerin kareleri ve çapraz çarpımlarına göre bağlanımı bulunur. İlk bağlanımda sabit terim olmasa bile burada sabit terim kullanılır.

3. Yardımcı bağlanıma ait R^2 ve örneklem büyüklüğü çarpılır:

$$R^2 \times n$$

4. Bu istatistik, yardımcı bağlanımdaki (sabit terim hariç) açıklayıcı değişken sayısı kadar sd ile χ^2 dağılımına uyar.

5. Eğer bulunan χ^2 değeri seçili anlamlılık düzeyindeki kritik değerden büyükse, aynıserpilimsellik sıfır önsavı reddedilir.

- Goldfeld-Quandt sınamasının sakıncası, gözlemlerin hangi X değişkenine göre sıraya sokulduğuna bağlı olmasıdır.
- BPG sınamasının sakıncası da hata teriminin normalliği varsayımına duyarlı olmasıdır.
- White sınaması ise hem normallik varsayımına dayanmaz hem de uygulama yönünden basittir.
- Ancak bu sınama da dikkatli uygulanmalıdır.
- Eğer modelde çok sayıda değişken varsa bunlar, bunların kareleri ve çapraz çarpımları serbestlik derecesini tüketir.
- Ayrıca bazı durumlarda test istatistiğinin anlamlı olmasının nedeni farklıserpilimsellik olmayıp, model belirtim hatası olabilmektedir.
- Öyleyse White sınaması farklıserpilimselliği, model belirtim hatasını ya da her ikisini birden sınamada kullanılabilir.

4.3 Farklıserpilimselliği Düzeltmek

- Farklıserpilimsellik, SEK tahmincilerinin yansızlık ve doğrusallık özelliklerini bozmamaktadır.
- Ancak bu tahmincilerin etkinlik yoksunluğu önsav sınama işlemlerini kuşkulu duruma sokar.
- Dolayısıyla düzeltici önlemlerin gerekli olduğu açıktır.
- Sorunu düzeltmede izlenecek yaklaşım, farklıserpilimsel σ_i^2 varyanslarının bilinip bilinmediğine bağlıdır.
- Eğer σ_i^2 biliniyorsa ağırlıklı en küçük kareler kullanılır.
- σ_i^2 bilinmediği zaman ise White varyansları ya da çeşitli veri dönüştürme işlemleri uygulanır.

4.3.1 Ağırlıklı En Küçük Kareler

- AEK yöntemini göstermek için aşağıdaki iki değişkenli ÖBİ'yi ele alalım:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{u}_i, \qquad E(\hat{u}_i{}^2) = \sigma_i^2$$

- Farklıserpilimsel σ_i^2 varyansları biliniyor olsun. Yukarıdaki denklemin her iki yanını ağırlık değişkeni $1/\sigma_i$ ile çarpalım:

$$\tfrac{Y_i}{\sigma_i} = \hat{\beta}_1^* \left(\tfrac{1}{\sigma_i}\right) + \hat{\beta}_2^* \left(\tfrac{X_i}{\sigma_i}\right) + \left(\tfrac{\hat{u}_i}{\sigma_i}\right)$$

- Yukarıdaki dönüştürmeli modelin hata teriminin varyansı artık sabit ve 1'e eşittir.
- AEK yöntemi, bu dönüştürmeli modelin SEK ile tahmin edilmesi demektir.
- İlk modelin sabit terimli, dönüştürmeli modelin ise sıfır noktasından geçen bir bağlanım olduğuna dikkat ediniz.

4.3.2 Verilerin Dönüştürülmesi

Düzeltmeli White Varyansları

- Gerçek σ_i^2 çoğu zaman bilinemez.
- Böyle durumlarda SEK tahmincilerinin *"farklıserpilimsellik tutarlı"* (heteroscedasticity consistent) White varyansları kullanılabilir.
- Farklıserpilimsellik tutarlı White ölçünlü hatalarına *"sağlam ölçünlü hatalar"* (robust standard errors) da denmektedir.
- Birçok ekonometri yazılımı, SEK ölçünlü hataları yanında sağlam ölçünlü hataları da vermektedir.
- Sağlam ölçünlü hatalar SEK ölçünlü hatalarına göre daha büyük ya da daha küçük olabilmektedirler.
- White sürecinin sakıncası ise bunun kavuşmazsal olarak geçerli (büyük örnekleme dayalı) bir süreç olmasıdır.
- Ayrıca, White tahmincileri farklıserpilimselliği düzeltecek şekilde dönüştürülen verilerle elde edilen tahminciler kadar etkin olamayabilmektedirler.

Verilerin Dönüştürülmesi

- Verilerin dönüştürülmesi işlemi, SEK kalıntıları kullanılarak farklıserpilimselliğin gösterdiği *"örüntü"* (pattern) biçiminin incelenmesine dayanır.
- Yöntemi açıklamak için ikili bağlanım modelini ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

- Hangi dönüştürme işleminin yapılacağına ve bunun hangi X değişkenine göre yapılacağına çizim yöntemi ya da Park ya da Glejser sınamaları sonucunda karar verilebilir.

$1/X_i$ **Dönüştürmesi**

- Hata varyansının X_i^2 ile doğru orantılı olduğunu varsayalım:

$$E(u_i^2) = \sigma^2 X_i^2$$

- Bu durumda ilk model X_i'ye bölünerek dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned}\frac{Y_i}{X_i} &= \frac{\beta_1}{X_i} + \beta_2 + \frac{u_i}{X_i}\\ &= \beta_1 \frac{1}{X_i} + \beta_2 + v_i\end{aligned}$$

- Böylece dönüştürülen hata terimi v_i'nin varyansı sabit olur:

$$E(v_i)^2 = E\left(\frac{u_i}{X_i}\right)^2 = \frac{1}{X_i^2}E(u_i^2) = \sigma^2$$

- Artık dönüştürmeli modele SEK uygulanabilir. İlk modele dönmek için ise tahmin edilen model yeniden X_i ile çarpılır.

Karekök Dönüştürmesi

- Hata varyansının X_i ile doğru orantılı olduğunu varsayalım:

$$E(u_i^2) = \sigma^2 X_i$$

- Bu durumda ilk model $\sqrt{X_i}$'ye bölünerek dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned}\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} &= \frac{\beta_1}{\sqrt{X_i}} + \beta_2\sqrt{X_i} + \frac{u_i}{\sqrt{X_i}}\\ &= \beta_1 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + \beta_2\sqrt{X_i} + v_i\end{aligned}$$

- Burada $E(v_i^2) = \sigma^2$ olduğu, diğer bir deyişle v_i teriminin aynıserpilimselliği doğrulanabilir.
- β_1 ve β_2'yi tahmin etmek için sıfır noktasından geçen SEK bağlanımı kullanılır.
- Daha sonra, bağlanımı yorumlamak için tüm değişkenler $\sqrt{X_i}$ ile çarpılarak ilk modele dönülür.

$1/E(Y_i)$ Dönüştürmesi

- Hata varyansının Y_i'nin ortalama değerinin karesiyle ilişkili olduğunu varsayalım:

$$E(u_i^2) = \sigma^2[E(Y_i)]^2$$

- Bu durumda ilk model aşağıdaki gibi dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned}\frac{Y_i}{E(Y_i)} &= \frac{\beta_1}{E(Y_i)} + \beta_2\frac{X_i}{E(Y_i)} + \frac{u_i}{E(Y_i)} \\ &= \beta_1\frac{1}{E(Y_i)} + \beta_2\frac{X_i}{E(Y_i)} + v_i\end{aligned}$$

- Ancak bu dönüştürme uygulanabilir değildir çünkü $E(Y_i)$ değerleri, bilinmeyen β_1 ve β_2'ye bağlıdır.
- Bu yüzden, $E(Y_i)$ yerine tahmincisi $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$ alınır. Örneklem büyüklüğü artarken $\hat{Y}_i$'lar da gerçek $E(Y_i)$'lere yakınsayacağı için, bu yöntem uygulamada yeterli olabilir.

Log Dönüştürmesi

- Aşağıda verilen alışıldık log dönüştürmesini ele alalım:

$$\ln Y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + v_i$$

- Farklıserpilimsellik sorunu burada $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ gibi bir modelde olduğu kadar önemli değildir.
- Bunun nedeni, log dönüştürmesinin verilerin ölçeğini daraltarak değişkenler arası farkı azaltmasıdır.
- Log dönüştürmesinin sağladığı diğer bir yarar da β_2 eğim katsayısının Y'nin X'e göre esnekliğini vermesidir.
- Bu iki özellik, log modellerinin uygulamalı ekonometride yaygın olarak kullanılmasının nedenlerindendir.
- Öte yandan, log dönüştürmesi yapılırken hata teriminin ne şekilde ele alınacağı konusuna özen gösterilmelidir.

Önemli Bazı Noktalar

Ele alınan dönüştürmelerle ilgili önemli bazı noktalar şunlardır:

- İkiden fazla değişken olduğu zaman, dönüştürme için hangi X'in seçileceği konusuna dikkat edilmelidir.
- Eğer Y ya da X değişkenlerinden bazıları sıfır ya da eksi değerli olursa, log dönüştürmesi uygulanamaz.
- Bu durumda tüm gözlemleri artı yapacak şekilde seçilen artı değerli bir k sayısından yararlanılabilir.
- Zaman zaman, değişkenler ilişkisiz olsalar bile bunların oranları arasında bir *"düzmece"* (spurious) ilinti oluşabilir. Örnek olarak, Y_i ve X_i ilişkisizken Y_i/X_i ve $1/X_i$ ilişkili olur.
- σ_i^2'ler bilinmeyip de çeşitli dönüştürmeler ile tahmin edildiği zaman t sınaması ve F sınaması gibi tüm sınama işlemleri yalnızca büyük örneklemlerde geçerlidir. Bu nedenle küçük örneklem tabanlı bulgular yorumlanırken dikkat edilmelidir.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 11* “Heteroscedasticity: What Happens if the Error Variance Is Nonconstant?” okunacak.

Önümüzdeki Ders
Özilinti

Bölüm 5

Özilinti

5.1 Özilintinin Niteliği

KDBM'nin önemli bir varsayımı, bağlanım işlevinde yer alan u_i bozuklukları arasında *"özilinti"* (autocorrelation) olmadığıdır. Ancak bu varsayım her zaman geçerli olmayabilir. Bu bölümde şu sorulara yanıt arayacağız:

1. Özilintinin niteliği nedir?
2. Uygulamada doğurduğu sonuçlar nelerdir?
3. Varlığı nasıl anlaşılabilir?
4. Düzeltmek için ne gibi önlemler alınabilir?

- Özilinti, zaman ya da uzay içerisinde dizili gözlem üyeleri arasındaki sıraya dayanan ilişkiyi anlatan bir kavramdır.
- Özilinti aynı yönlü ya da ters yönlü olabilir. Ancak genellikle aynı yönlü olarak görülür.
- Genel olarak özilinti zaman serilerinde görülen bir olgudur. Zaman serilerinde gözlemler zamana göre dizildikleri için, ardışık gözlemler arasında ilişki bulunması olasıdır.
- Yatay kesit verilerinde özilinti görülebilmesi için ise verilerin iktisadi anlamı olan bir şekilde dizilmiş olmaları gereklidir.
- Yatay kesit verilerinde görülen bu tür sıralı ilişkiye *"uzaysal özilinti"* (spatial autocorrelation) denir.

- Zaman serilerinde gözlenebilen özilintiye örnek olarak, üç aydan uzun süren bir grevin üçer aylık üretim verileri üzerindeki etkisini gösterebiliriz.
- Yatay kesit verilerindeki uzaysal özilintiye örnek olarak ise bir ailenin tüketimindeki artışın, komşusundan geri kalmak istemeyen diğer bir ailenin tüketimini de artırması verilebilir.
- Özilintiyi tanımlayabilmek için, klasik doğrusal bağlanım modelinin varsayımlarından biri olarak u_i bozukluklarının birbirlerinden bağımsız olduğunu anımsayalım:

$$E(u_i u_j) = 0 \qquad i \neq j$$

- Özilinti ise herhangi bir gözleme ait hatanın önceki gözleme ait hatadan etkilenmesi durumudur:

$$E(u_i u_j) \neq 0 \qquad i \neq j$$

- Demek ki özilinti, ikincisi birincisinin gecikmelisi olan, örnek olarak u_1,$u_2, \ldots$,u_{10} ile u_2,$u_3, \ldots$,u_{11} gibi iki dizi arasındaki ilintiden başka birşey değildir.
- $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ ve $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ gibi birbirinden farklı iki dizi arasındaki ilişkiye ise *"serisel ilinti"* (serial correlation) adı verilir.

5.1.1 Özilintinin Nedenleri

Özilintinin nedenlerinden bazıları şunlardır:

1. Süredurum etkisi
2. Dışlanan değişkenler
3. Yanlış işlev biçimi
4. Örümcek ağı olgusu
5. Gecikmeler
6. Veri dönüştürmesi
7. Durağan-dışılık

Neden 1: Süredurum etkisi
Özilintinin en önemli nedeni, iktisadi zaman serilerinde sıkça görülen *"süredurum"* (inertia) ya da ağır hareketliliktir.

- Bilindiği gibi GSYH, üretim, işsizlik, fiyat endeksleri gibi zaman serileri çevrimsel dalgalanmalar sergilerler.
- Böyle serilerin doğasında bir ivmelenme bulunur. Önemli bir gelişme oluncaya kadar sürekli bir artma ya da azalma göstermeyi sürdürürler.
- Gözlemler arasındaki süre kısa ise bu durumla daha çok karşılaşılır.

Neden 2: Dışlanan değişkenler
Eksik bir değişken ya da değişkenlerden kaynaklı bir model belirtim hatası özilintiye neden olabilir.

- Aşağıdaki iki modeli karşılaştıralım:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \\ Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + v_t \end{aligned}$$

- Eğer doğru olan model birincisi ise, ikinciyi tahmin etmek $v_t = \beta_4 X_{4t} + u_t$ durumuna yol açar.
- Bu durumda v_t hata terimi düzenli bir örüntü yansıtacaktır.
- Kalıntılar arasında gözlenen bu ilişki çoğu zaman dışlanan değişkenin modele alınmasıyla yok olur.

Neden 3: Yanlış işlev biçimi
Yanlış işlev biçimi kullanmak da değişken dışlamak gibi bir model belirtim hatasıdır ve özilintiye yol açabilir.

- X_{2t} üretim ve Y_t de marjinal maliyet olsun. Aşağıdaki iki modeli ele alalım:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{2t}^2 + u_t \\ Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + v_t \end{aligned}$$

- İkinci modeli alarak doğrusal bir ilişki varsaymak, marjinal maliyetin sistematik olarak olduğundan büyük ya da küçük tahmin edilmesine yol açar.
- Bunun nedeni, yanlış belirtimli modelde $v_t = \beta_3 X_{2t}^2 + u_t$ eşitliğinin geçerli olmasıdır.

Neden 4: Örümcek ağı olgusu
Özilinti, verilerin *"örümcek ağı olgusu"* (cobweb phenomenon) denen durumu yansıttığında da ortaya çıkar.

- Örnek olarak, tarım ürünlerinde üretim zaman aldığı için arz fiyata bir dönem gecikmeli tepki verebilir:

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_{t-1} + u_t$$

- Eğer t dönemindeki fiyat düşük olursa, çiftçiler $t+1$'de üretimi kısabilirler ve bu da fiyatların birden yükselmesine yol açabilir.
- Bu böyle sürerek örümcek ağı örüntüsüne yol açar.
- Böyle bir durumda u_t bozukluk terimi de rastsal olmaktan çıkıp düzenli bir yapı sergiler.

Neden 5: Gecikmeler
Özilintinin bir nedeni de modelde yer alan gecikme terimleridir.

- Kimi zaman bağımlı değişkenin önceki bir dönemde aldığı değer, modele açıklayıcı değişken olarak girebilir.
- Örnek olarak; tüketiciler tüketim alışkanlıklarını psikolojik, teknolojik ve kurumsal nedenlerle hemen değiştirmezler.
- Buna göre bu dönemdeki tüketim, başka etmenlerin yanı sıra bir önceki dönemin *"gecikmeli"* (lagged) tüketimine de bağlı olur:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 C_{t-1} + u_t$$

- Böyle bir bağlanıma *"özbağlanım"* (autoregression) denir.
- Burada eğer gecikme terimi gözardı edilirse, ortaya çıkan hata terimi, gecikmeli tüketimin bugünkü tüketim üzerindeki etkisinden doğan düzenli bir örüntü gösterecektir.

Neden 6: Veri dönüştürmeleri
Çeşitli veri dönüştürme işlemleri de özilintiye yol açabilir.

- Birçok görgül çözümlemede verileri dönüştürmek gerekir.
- Örnek olarak, üç aylık zaman serisi verileri aylık verilerin toplanıp üçe bölünmesiyle bulunabilir.
- Bu ortalama alma işlemi ise aylık verilerdeki dalgalanmaları törpüleyerek verilerde bir düzlenme yaratır.

- Böylece üç aylık verileri gösteren çizimler aylık verilere göre daha düz olur.
- Bu düzlenme de bozukluk teriminde düzenli bir örüntüye neden olabilir.
- Bu sorun *"içdeğer biçme"* (interpolation) ve *"dışdeğer biçme"* (extrapolation) durumlarında da ortaya çıkabilir.

Neden 7: Durağan-dışılık
Zaman serilerinde sıkça karşılaşılan ve önemli bir sorun olan *"durağan-dışılık"* (non-stationarity) altında hata terimi özilintilidir.

- Bir zaman serisinin durağan olması seriye ait ortalama, varyans, kovaryans gibi çeşitli özelliklerin zamana göre değişken olmaması demektir.
- Aksi durumda seri *"durağan-dışı"* (non-stationary) olur.
- Bir bağlanım modelinde Y_t ve X_t'nin durağan-dışı olması ve bu nedenle u_t'nin de durağan-dışı olması olasıdır.
- Bu durumda hata terimi özilinti sergiler.

5.1.2 Özilintinin SEK Tahminlerine Etkisi

Birinci Derece Özbağlanım

- Özilintinin SEK tahmincileri ve bunların varyansları üzerindeki etkilerini görmek için, iki değişkenli bağlanım modeline dönelim:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

- Burada zaman serisi verileri kullanıldığına dikkat ediniz.
- Hata terimi ile ilgili baştaki varsayımımızı anımsayalım:

$$E(u_t u_{t+s}) \neq 0, \qquad s \neq 0$$

- Bu varsayım çok genel olduğu için, u_t'yi oluşturan yapı konusunda da bir varsayım yapmamız gerekmektedir.
- Bozukluk teriminin şöyle oluştuğunu varsayalım:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \qquad -1 < \rho < 1$$

- Buradaki ρ terimine *"özkovaryans katsayısı"* (coefficient of autocovariance) ya da *"birinci derece özilinti katsayısı"* (first order autocorrelation coefficient) denir.

- ϵ_t ise SEK varsayımlarını sağlayan bozukluk terimidir:

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0 \\ \text{var}(\epsilon_t) &= \sigma^2 \\ \text{cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t+s}) &= 0 \qquad s \neq 0 \end{aligned}$$

- Bu yapıya *"Markov birinci derece özbağlanımsal tasarım"* (Markov first order autoregressive scheme) adı verilir ve AR(1) ile gösterilir.

- Yukarıdaki özellikleri gösteren hata terimine mühendislikte *"beyaz gürültü"* (white noise) de denir.

- Tanımladığımız birinci derece özbağlanımsal diziyi inceleyelim:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

- Yukarıda u_t'deki değişimin iki farklı parçadan oluştuğu görülmektedir.

- Birinci parça ρu_{t-1}, düzenli bir kaymayı göstermektedir. İkinci parça olan ϵ_t ise tümüyle rastsaldır.

- Bu dizi birinci derece özbağlanımsaldır çünkü yalnızca u_t ve onun bir önceki değeri söz konusudur.

- İkinci derece özbağlanımsal tasarım ya da kısaca AR(2) tasarımı ise şöyle gösterilir:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \epsilon_t$$

AR(1)'in SEK Tahminlerine Etkisi

- Özilinti durumunda β'ların SEK tahminleri değişmez.

- Ancak, hata terimi AR(1) iken β_2'nin varyansı şöyle olur:

$$\text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}\left[1 + 2\rho\frac{\sum x_t x_{t-1}}{\sum x_t^2} + 2\rho^2\frac{\sum x_t x_{t-2}}{\sum x_t^2} + \cdots + 2\rho^{n-1}\frac{x_1 x_n}{\sum x_t^2}\right]$$

- Bunu özilintinin olmadığı genel formülle karşılaştıralım:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$$

- Demek ki $\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)_{\mathrm{AR1}}$ formülü, bildiğimiz varyans formülüne ρ'ya dayalı bir terimin eklenmesiyle bulunmaktadır.
- Genel olarak $\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)_{\mathrm{AR1}}$ değerinin $\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)$'dan büyük mü yoksa küçük mü olacağı önceden bilinemez.
- Özilinti varken, SEK tahmincisi $\hat{\beta}_2$ yanında AR(1)'i dikkate alan $\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)_{\mathrm{AR1}}$ formülünü kullanmak yeterli değildir.
- $\hat{\beta}_2$ bu durumda doğrusal ve yansız olmaya devam etse de artık enaz varyanslı olmayarak EDYT özelliğini kaybeder.
- Özilinti altında *"etkin"* (efficient) tahminci, farklıserpilimsellik durumunda olduğu gibi GEK yöntemiyle bulunabilir.

AR(1) Altında EDYT Tahminci

- İki değişkenli modelde ve AR(1) süreci altında, GEK ile bulunan ve EDYT olan tahminci ve bunun varyansı şöyledir:

$$\hat{\beta}_2^{\mathrm{GEK}} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \rho x_{t-1})(y_t - \rho y_{t-1})}{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \rho x_{t-1})^2} + C$$

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_2^{\mathrm{GEK}}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \rho x_{t-1})^2} + D$$

- Buradaki C ve D terimleri, uygulamada gözardı edilebilen düzeltme terimleridir.
- Ayrıca t alt iminin 2'den n'ye kadar olduğuna dikkat ediniz.
- Demek ki GEK tahmincisi anakütledeki özilinti katsayısı ρ'yu içerirken, SEK bunu görmezden gelmektedir.
- SEK'in değil de GEK'in EDYT olmasının nedeni sezgisel olarak budur. Eğer $\rho = 0$ ise iki tahminci aynı olur.

AR(1) Altında SEK Kullanmanın Sonuçları

- Özilinti varken, var$(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}}$ tanımı kullanılsa bile güven aralıkları var$\hat{\beta}_2^{\text{GEK}}$'e göre daha geniş olabilir.
- Demek ki özilinti göz önüne alınsa bile SEK süreci GEK'e göre anlamlı bir tahmini anlamsız gösterebilmektedir.
- SEK kullanmakla kalmayıp özilintiyi göz ardı eden sıradan var$(\hat{\beta}_2)$ formülünü kullanmanın sonuçları ise daha ciddidir.
- Eğer ρ artı işaretli (u_t'ler aynı yönlü ilişki içinde) ise, kalıntı varyansı $\hat{\sigma}^2$ gerçek σ^2'yi olduğundan küçük tahmin eder.
- Aşağı doğru yanlı $\hat{\sigma}^2$ da R^2'yi olduğundan büyük bulur.
- Ayrıca $\hat{\sigma}^2$'daki yanlılık var$(\hat{\beta}_2)$'ya da aktarılır.
- Bunun sonucunda var$(\hat{\beta}_2) <$ var$(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}}$ olur ve bildiğimiz t ve F sınamaları geçerliliklerini yitirir.
- Sonuç olarak, SEK tahmincileri yansız ve tutarlı olsalar da özilinti varken SEK değil GEK kullanılmalıdır.

5.2 Özilintiyi Saptamak

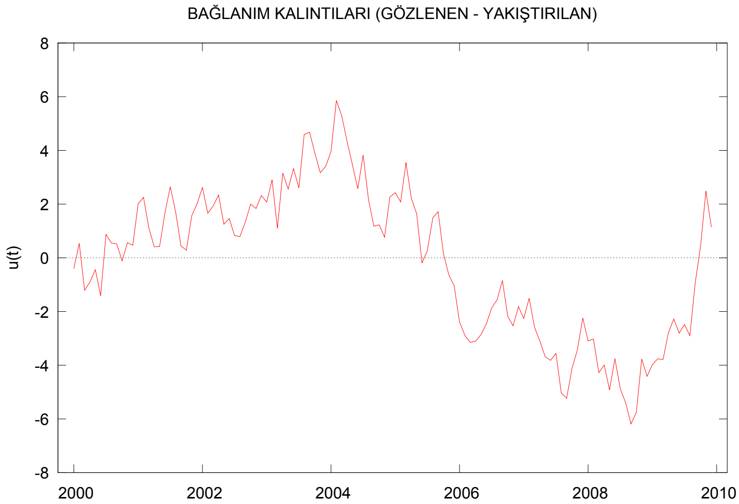
5.2.1 Çizim Yöntemi ve Dizilim Sınaması

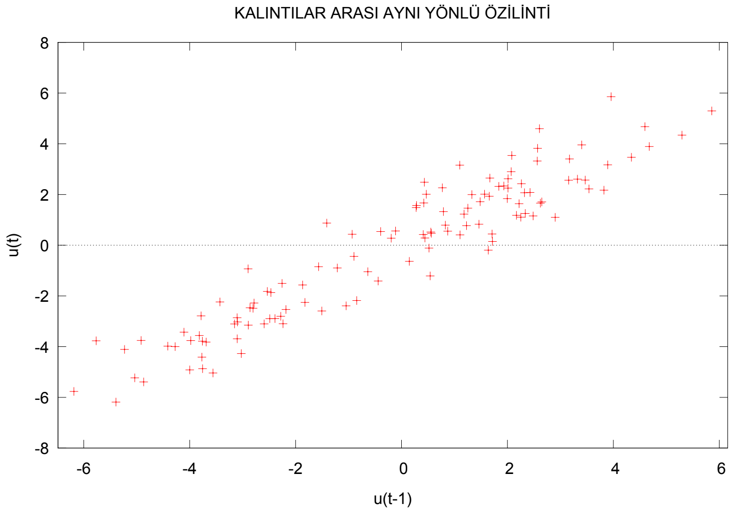
Çizim Yöntemi

- Özilintinin var olup olmadığını anlamada nitel bir yöntem olan çizim yönteminin yanı sıra çeşitli nicel sınamalardan yararlanılabilir.
- Çizim yöntemi için SEK süreci kullanılır ve elde edilen $\hat{u}_t$ kalıntıları görsel olarak incelenir.
- Tahmin edilen $\hat{u}_t$'lar her ne kadar gerçek u_t'lerle aynı şey değilse de, önemli ipuçları verebilirler.
- Böyle bir görsel inceleme yalnızca özilinti konusunda değil; farklıserpilimsellik, model yetersizliği ve model belirtim yanlılığı konularında da yararlı bilgiler sağlayabilmektedir.

Kalıntıları birkaç farklı şekilde incelemek olasıdır:

1. Öncelikli olarak kalıntılar zamana göre çizilebilir. Bu çizime *"zaman dizisi çizimi"* (time sequence plot) denir.
2. Almaşık olarak, *"ölçünlü kalıntılar"* (standardized residuals) incelenebilir. Ölçünlü kalıntılar, $\hat{u}_t$'ların tahmin edilen ölçünlü hata $\hat{\sigma}$'ya bölünmesiyle bulunur. Bunlar saf sayılar oldukları için başka bağlanımlarınkilerle karşılaştırılabilirler. Ortalamaları sıfır, varyansları da birdir.
3. Üçüncü olarak, $\hat{u}_t$'ların $\hat{u}_{t-1}$'ya göre çizimi incelenebilir. Eğer t dönemi kalıntıları $t-1$ dönemindekilerle düzenli bir ilişki sergiliyorsa, bunların rastsal olmadığı sonucu çıkar.





Dizilim Sınaması

- Kalıntıların rastsal bir sıra izleyip izlemediğini anlamak için *"dizilim"* (runs) sınamasını kullanabiliriz.
- Bu sınama, gözlemlerin içinden seçildiği dağılıma ilişkin herhangi bir varsayım yapmadığı için *"değiştirgesel-dışı"* (non-parametric) bir sınamadır.
- Bu sınamayı açıklamak için aşağıdaki kalıntı işaretleri dizilimini ele alalım:

$$(-------)(+++++++++++++)(-)(+)(---------)$$

- Gözlem sayısı burada $n = 7 + 12 + 1 + 1 + 9 = 30$'dur.
- Artı işaretli gözlem sayısı $n_1 = 13$, eksi işaretli gözlem sayısı da $n_2 = 17$'dir. Toplam dizilim sayısı ise $k = 5$'tir.
- Verilen tanımlara göre ve $n_1 > 10$ ve $n_2 > 10$ varsayımları altında ardışık kalıntılar, eğer gerçekten bağımsızlarsa, aşağıda verilen ortalama ve varyans ile normal dağılıma uyarlar:

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{2n_1n_2}{n} + 1 \\ \sigma_k^2 &= \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n)}{n^2(n-1)} \end{aligned}$$

- Buna göre, eğer $[E(k) - 1{,}96\sigma_k \leq k \leq E(k) + 1{,}96\sigma_k]$ ise rastsallık sıfır önsavı %95 güvenle reddedilmez.

5.2.2 Durbin-Watson d Sınaması

- Özilintiyi bulmak için kullanılan en yaygın sınama, Durbin ve Watson tarafından geliştirilmiş olan d sınamasıdır.
- Bu sınamanın üstünlüğü bağlanım çözümlemesi sırasında hep hesaplanan $\hat{u}_t$'lara dayanmasıdır:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{t=n} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{t=n} \hat{u}_t^2}$$

- Yukarıdaki formül, basitçe ardışık kalıntıların fark kareleri toplamının KKT'ye oranını göstermektedir.
- Fark alma sırasında bir gözlem kaybedildiği için istatistiğin payında $n - 1$ gözlem bulunduğuna dikkat ediniz.
- Gretl gibi ekonometri yazılımları bağlanım çıktıları arasında Durbin-Watson d değerini de öntanımlı olarak verir.
- Durbin-Watson d istatistiği alışık olduğumuz normal, t, χ^2 ve F dağılımlarına uymaz.
- X değerleri ile olan karmaşık bağlılığı yüzünden d'nin olasılık dağılımını türetmek zordur.

- Bu nedenle, bu sınamaya ait özilintinin olmadığı yönündeki sıfır önsavının reddedilmesine ya da reddedilmemesine götüren tek bir eşik değeri yoktur.
- Onun yerine, gözlem sayısı n ile sabit terim hariç açıklayıcı değişken sayısı k'ya bağlı bir alt sınır d_{a} ve bir üst sınır $d_{\text{ü}}$ bulunmaktadır.
- $n = \{6, \dots, 200\}$ ve $k = \{1, \dots, 20\}$ aralıkları için d_{a} ve $d_{\text{ü}}$ değerleri Durbin ve Watson tarafından hesaplanmış ve bir çizelge olarak yayınlanmıştır.

- Durbin-Watson d istatistiği 0 ile 4 sınırları içinde yer alır.
- Bunu göstermek için d'yi şöyle yazalım:

$$d = \frac{\sum \hat{u}_t^2 + \sum \hat{u}_{t-1}^2 - 2\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

- $\hat{u}_t^2$ ile $\hat{u}_{t-1}^2$ arasında yalnızca bir gözlemlik fark olduğu için ikisi yaklaşık olarak birbirine eşittir. Buna göre:

$$d \approx 2\left(1 - \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}\right)$$

- Şimdi, ρ'nun bir tahmincisi olarak örneklem birinci derece özilinti katsayısını şöyle tanımlayalım:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

- Tanım gereği $-1 \leq \rho \leq 1$ olduğu için $0 \leq d \leq 4$ olur.
- Hesaplanan d istatistiği 0'a yakınsa aynı yönlü, 4'e yakınsa da ters yönlü özilinti olma olasılığı yüksektir.
- Eğer $d = 2$ dolaylarında ise, özilinti olmadığı varsayılabilir.

Durbin-Watson sınamasının adımları şöyledir:

1. SEK bağlanımı bulunur.
2. Kalıntılar kullanılarak d istatistiği hesaplanır.
3. Örneklem büyüklüğü n'ye ve açıklayıcı değişken sayısı k'ya göre d_{a} ve $d_{\text{ü}}$ kritik değerleri bulunur.

4. Aşağıdaki çizelgede verilen karar kuralları uygulanır:

Çizelge: Durbin-Watson d Sınaması Karar Kuralları

Sıfır Önsavı	Karar	Durum
Aynı yönlü özilinti yok	Reddedilir	$0 < d < d_a$
Aynı yönlü özilinti yok	Karar Yok	$d_a \leq d \leq d_ü$
Özilinti yok	Reddedilmez	$d_ü < d < 4 - d_ü$
Ters yönlü özilinti yok	Karar Yok	$4 - d_ü \leq d \leq 4 - d_a$
Ters yönlü özilinti yok	Reddedilir	$4 - d_a < d < 4$

Kiplemeli d Sınaması

- Yaygın olarak kullanılan d sınamasının önemli bir aksaklığı, sonucun kimi zaman kararsızlık bölgesine düşebilmesidir.
- Ancak, çoğunlukla $d_ü$ üst sınırının yaklaşık olarak gerçek anlamlılık sınırı olduğu bulunmuştur.
- Dolayısıyla bulunan d değeri eğer kararsızlık bölgesinde olur ise, *"kiplemeli"* (modified) d sınaması karar kuralları uygulanır:

Çizelge: Kiplemeli Durbin-Watson d Sınaması Karar Kuralları

Sıfır Önsavı	Karar	Durum
$H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho > 0$	α düzeyinde reddedilir	$d < d_ü$
$H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho \neq 0$	$\alpha/2$ düzeyinde reddedilir	$d_ü < d < 4 - d_ü$
$H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho < 0$	α düzeyinde reddedilir	$4 - d_ü < d$

Yaygın olarak kullanılan Durbin-Watson sınamasının gerisinde yatan şu üç varsayıma dikkat edilmelidir:

1. Açıklayıcı değişkenler olasılıksal-dışı olmalıdır. Diğer bir deyişle, bağlayanlara ait değerlerin tekrarlı örneklemede değişmiyor olması gereklidir.
2. u_t hataları normal dağılıma uymalıdır. Öte yandan d istatistiğinin büyük örneklemlerde ölçün normal dağılıma uyduğunu göstermek de olanaklıdır.
3. Bağımlı değişkenin gecikmelerinin açıklayıcı değişken(ler) olarak modelde bulunmaması gereklidir. Bu, sınamanın uygulanmasında son derece önemlidir.

5.2.3 Breusch-Godfrey Sınaması

Durbin-Watson'a almaşık bir diğer sınama da Breusch-Godfrey sınamasıdır. *"Lagrange çarpanı"* (Lagrange multiplier), kısaca *"LÇ"* (LM) sınaması da denen bu yöntemin özellikleri şunlardır:

- Bu sınama, açıklayıcı değişkenler arasında Y'nin gecikmeli değerlerinin olduğu durumda da kullanılabilmektedir.
- u_t bozukluk terimi p'inci dereceden bir *"hareketli ortalama"* (moving average) sürecine uysa bile uygulanabilir:

$$u_t = \epsilon_t + \lambda_1\epsilon_{t-1} + \lambda_2\epsilon_{t-2} + \cdots + \lambda_p\epsilon_{t-p}$$

- Birinci derece özilinti anlamında $p = 1$ ise, sınama Durbin m sınaması adını alır.
- BG sınamasının bir sakıncası, gecikme uzunluğu p'nin önsel olarak belirlenememesidir.

BG sınamasını açıklamak için, hata teriminin p'inci derece özbağlanımsal tasarıma göre türediğini düşünelim:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \cdots + \rho_p u_{t-p} + \epsilon_t$$

Sınama adımları aşağıdaki gibidir:

1. Bağlanım SEK ile tahmin edilip kalıntılar elde edilir.
2. $\hat{u}_t$'ların ilk modeldeki açıklayıcı değişkenler ve 1. adımdaki kalıntıların gecikmeli değerleri olan $\hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, \ldots, \hat{u}_{t-p}$ ek değişkenlerine göre bağlanımı bulunur ve R^2 hesaplanır.
3. $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_p = 0$ sıfır önsavı ve büyük örneklem varsayımı altında şu geçerlidir:

$$(n - p) \cdot R^2 \sim \chi^2_p$$

4. Bulunan değer kritik χ^2 değerini aşıyorsa H_0 reddedilir.

5.3 Özilintiyi Düzeltmek

- Özilintinin yol açabildiği ciddi sonuçları düşünüldüğünde, sorun var olduğu zaman düzeltici bazı önlemler almanın gerekli olduğu da açıktır.
- Bozukluk terimi u_t gözlenemediği için, özilintinin niteliğini anlamak çeşitli uygulamalı yöntemlere konu olur.
- Genel olarak u_t'nin birinci derece özbağlanımsal tasarım AR(1)'e uyduğu varsayılır:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

- Burada $|\rho| < 1$'dir. ϵ_t ise SEK varsayımlarına uymaktadır.
- Sorun çoğu zaman GEK yöntemi yardımı ile çözülebilse de çözümde izlenecek yol ρ'nun bilinip bilinmediğine bağlı olarak değişir.

5.3.1 ρ Biliniyorsa

- ρ'nun değerinin bilindiği durumda, AR(1) sorunu GEK yöntemi ile çözülebilir. İki değişkenli modele dönelim:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

- Yukarıdaki denklemin $t-1$ dönemi için yazılmış şeklini ρ katsayısı ile çarpalım:

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_1 + \rho\beta_2 X_{t-1} + \rho u_{t-1}$$

- İkinci denklemi birinciden çıkartırsak şunu elde ederiz:

$$\begin{array}{ccccccc} (Y_t - \rho Y_{t-1}) = & \beta_1(1-\rho) & + & \beta_2(X_t - \rho X_{t-1}) & + & (u_t - \rho u_{t-1}) \\ Y_t^* = & \beta_1^* & + & \beta_2 X_t^* & + & \epsilon_t \end{array}$$

- Bu denkleme *"genellemeli fark denklemi"* (generalized difference equation) adı verilir.
- ϵ_t tüm SEK varsayımlarını karşıladığı için, dönüştürmeli Y^* ve X^* değişkenlerine SEK uygulanarak EDYT özelliği gösteren tahminciler elde edilebilir.

Prais-Winsten Dönüştürmesi

- Gösterilen fark denklemi, tüm gözlemlerin kendilerinden bir önceki değerlerinden ρ oranı kadarını çıkartmakla bulunur.
- Ancak bu işlem sırasında ilk gözlem kaybedilmektedir.
- Bu kaybı engellemek amacıyla Prais-Winsten dönüşümü uygulanabilir.
- Buna göre Y ve X'in ilk değerleri şöyle dönüştürülür:

$$Y_1\sqrt{1-\rho^2} \qquad \text{ve} \qquad X_1\sqrt{1-\rho^2}$$

- Bu dönüştürmenin özellikle küçük örneklemlerde bağlanım sonuçlarını etkileyeceğine dikkat edilmelidir.

Birinci Fark Yöntemi

- ρ değiştirgesi 0 ile ±1 aralığında yer aldığına göre, $+1$ ve -1 uç değerlerini tartışmakta yarar vardır.
- Eğer $\rho = +1$ ise genellemeli fark denklemi *"birinci fark"* (first-difference) denklemine şöyle indirgenir:

$$\begin{aligned}(Y_t - Y_{t-1}) &= \beta_2(X_t - X_{t-1}) + (u_t - u_{t-1})\\ \Delta Y_t &= \beta_2\Delta X_t + \epsilon_t\end{aligned}$$

- Yukarıdaki denklemde sabit terim olmadığına dikkat ediniz.
- Almaşık olarak, içinde genel eğilim değişkeni t olan modeli ele alalım:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2X_t + \beta_3t + u_t$$

- Bu durumda birinci fark denklemi şöyle olur:

$$\Delta Y_t = \beta_2\Delta X_t + \beta_3 + \epsilon_t$$

- Burada β_3 sabit terimi, tüm değişkenlerin etkisi göz önüne alındıktan sonra Y'nin zaman içindeki eğilimini gösterir.
- İktisadi serilerde çok sık görülmeyen ters yönlü tam özilinti durumunu ele alalım.

- Eğer $\rho = -1$ olursa, genellemeli fark denklemi şu olur:

$$\begin{aligned} (Y_t + Y_{t-1}) &= 2\beta_1 + \beta_2(X_t + X_{t-1}) + \epsilon_t \\ \frac{(Y_t + Y_{t-1})}{2} &= \beta_1 + \beta_2 \frac{X_t + X_{t-1}}{2} + \frac{\epsilon_t}{2} \end{aligned}$$

- Yukarıdaki model bir hareketli ortalamanın diğerine göre bağlanımını bulduğu için, *"iki dönemli hareketli ortalama"* (two period moving average) bağlanımı diye adlandırılır.

Berenblutt-Webb Sınaması

- Birinci fark dönüştürmesi uygulamada yaygındır. Ancak kullanılabilmesi için önce $\rho = +1$ varsayımı sınanmalıdır.
- Bu doğrultuda, aşağıda gösterilen Berenblutt-Webb g istatistiği kullanılabilir:

$$g = \sum_{t=2}^{n} \hat{e}_t^2 / \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2$$

- $\hat{u}_t$ burada ilk modeldeki SEK kalıntılarını göstermektedir.
- $\hat{e}_t$ ise $\rho = 1$ iken (sıfır noktasından geçen) birinci fark bağlanımından gelen kalıntılardır.
- Özgün modelde sabit terim bulunması şartıyla, g istatistiği sınanırken Durbin-Watson çizelgeleri kullanılır.
- Sıfır önsavı ise Durbin-Watson'ınkinin tersine $\rho = 1$'dir.

5.3.2 ρ Bilinmiyorsa

d İstatistiğini Kullanmak

- ρ'nun bilinmesi ender bir durum olduğu için, uygulamada genellikle tahmin yoluna gidilir.
- Eğer ρ bilinmiyorsa, bu katsayıyı tahmin etmenin bir yolu Durbin-Watson sınama istatistiği d'yi kullanmaktır.
- Daha önce saptamış olduğumuz şu ilişkiyi anımsayalım:

$$d \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

- Buna göre aşağıdaki yaklaşıklık geçerlidir:

$$\hat{\rho} \approx 1 - (d/2)$$

- Demek ki d istatistiği bize ρ'yu tahmin etmeye yönelik bir başparmak hesabı sunmaktadır.
- Yukarıdaki ilişkinin yaklaşık olduğu ve özellikle de küçük örneklemler için doğru olmayabileceğine dikkat edilmelidir.

İki Aşamalı Durbin Yöntemi

İki Aşamalı Durbin yöntemini açıklamak için genellemeli fark denklemini şu şekilde yazalım:

$$Y_t = \beta_1(1 - \rho) + \beta_2 X_t - \rho\beta_2 X_{t-1} + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Durbin, ρ'yu tahmin etmek için şu iki adımlı süreci önermiştir:

1. Yukarıdaki çoklu bağlanım modeli hesaplanır ve Y_{t-1}'in katsayısı, tahmin edilen $\hat{\rho}$ olarak ele alınır. Bu değer ρ'nun yanlı olmakla birlikte tutarlı bir tahminidir.
2. $\hat{\rho}$ bulunduktan sonra ise GEK yöntemi uygulanır. Diğer bir deyişle, $Y_t^* = (Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1})$ ve $X_t^* = (X_t - \hat{\rho}X_{t-1})$ dönüştürmeleri yapılır ve SEK bağlanımı hesaplanır.

Cochrane-Orcutt Süreci

- Kalıntıları kullanarak ρ'yu tahmin etmenin uygulamada sıklıkla yararlanılan bir yolu, Cochrane-Orcutt sürecidir.
- Bu *"yinelemesel"* (iterative) hesaplama yöntemi istatistikçi Cochrane ve Orcutt tarafından 1949 yılında bulunmuştur.
- İşlemi açıklamak için şu iki değişkenli modeli ele alalım:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

- Bozukluk terimi u_t'nin aşağıdaki AR(1) tasarımından türediğini de ayrıca varsayalım:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

(... devam)

Cochrane-Orcutt sürecinin adımları aşağıdaki gibidir:

1. Bağlanım SEK ile tahmin edilip kalıntılar elde edilir.
2. $\hat{u}_t$ kalıntıları kullanılarak şu bağlanım hesaplanır:

$$u_t = \hat{\rho}\hat{u}_{t-1} + v_t$$

3. $\hat{\rho}$ kullanılarak genellemeli fark bağlanımı elde edilir:

$$\begin{array}{ccccccc} (Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}) & = & \beta_1(1-\hat{\rho}) & + & \beta_2(X_t - \hat{\rho}X_{t-1}) & + & (u_t - \hat{\rho}u_{t-1}) \\ Y_t^* & = & \beta_1^* & + & \beta_2^* X_t^* & + & \epsilon_t^* \end{array}$$

4. $\hat{\rho}$'nın ρ'nun en iyi tahmini olduğu önsel olarak bilinemediği için, $\hat{\beta}_1^*$ ve $\hat{\beta}_2^*$ değerlerinden yeni bir kalıntı yöneyi bulunur:

$$u_t^{**} = Y_t - \hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_2^* X_t$$

5. Yeni u_t^{**}'lar yardımı ile ρ'nun ikinci tur tahmini $\hat{\hat{\rho}}$ bulunur:

$$u_t^{**} = \hat{\hat{\rho}}\hat{u}_{t-1}^{**} + w_t$$

6. ρ'nun yinelemesel tahminleri arasındaki fark yeterince küçülene kadar bu işleme devam edilir.

Diğer Yöntemler

- $\hat{\rho}$'yı bulmak için kullanılan diğer bazı yöntemler şunlardır:

  İki adımlı Cochrane-Orcutt süreci Hildreth-Lu arama süreci Doğrusal-dışı EO yöntemi

- Kavuşmazsal ya da büyük örneklemlerde bu yöntemler aşağı yukarı benzer sonuçlar vermektedir.
- Sonlu ya da küçük örneklemlerde ise elde edilen sonuçlar seçilen yönteme göre önemli değişiklikler gösterebilir.
- Uygulamada en yaygın kullanılan yöntem ise yinelemesel Cochrane-Orcutt sürecidir.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 12* “Autocorrelation” okunacak.

Önümüzdeki Ders
Ekonometrik Modelleme

Bölüm 6

Ekonometrik Modelleme

6.1 Belirtim Hatalarının Niteliği

KDBM'nin 9. varsayımı, kullanılan modelin "doğru" belirtilmiş olduğudur. Bu varsayım altında şu ana kadar katsayı tahmini ve buna ilişkin sınamalar üzerine odaklanılmıştı. Ancak, eğer model doğru belirtilmediyse *"model belirtim hatası"* (model specification error) ya da *"model belirtim yanlılığı"* (model specification bias) sorunu ortaya çıkar. Bu bölümde şu sorulara yanıt arayacağız:

1. Uygulamada karşılaşılan belirtim hataları nelerdir?
2. Bu hatalar hangi sonuçları doğurur?
3. Belirtim hataları nasıl saptanabilir?
4. Düzeltmek için ne gibi önlemler alınabilir?
5. Almaşık modeller arasında nasıl seçim yapılır?

Model belirtimi konusu, uzmanlar arasında zaman zaman bakış ayrılıkları da olabilen geniş bir alandır. Ancak yaygın görüşe göre çözümlemede kullanılacak model şu özellikleri taşımalıdır.

1. *Onanırlık:* Model çıkarımlarının kabul edilebilir olması.
2. *Kuram ile uyumluluk:* Modelin iktisat düşüncesi açısından anlamlı olması.
3. *Açıklayıcı değişken dıştürelliği:* Bağlayanların hata terimi ile ilintisiz olması.
4. *Değiştirge değişmezliği:* Değiştirge tahminlerinin farklı örneklemlerde değişmemesi.

5. *Veriler ile bağdaşma:* Kalıntıların tümüyle rastsallık, diğer bir deyişle *"beyaz gürültü"* (white noise) özelliği göstermesi.
6. *Kapsayıcılık:* Modelin açıklama gücü bakımından almaşık modeller içinde en iyisi olması.

6.1.1 Belirtim Hatası Türleri ve Bunların Sonuçları

Bir modelin yukarıda sözü edilen özellikleri kaybetmesine yol açabilecek dört önemli hata türü şunlardır:

- *"Atlanan değişken hatası"* (omitted variable error)
- *"İlgisiz değişken hatası"* (irrelevant variable error)
- *"Yanlış işlev biçimi"* (wrong functional form)
- *"Ölçüm hataları yanlılığı"* (measurement errors bias)

Şimdi bu sorunları ve neden oldukları olumsuz sonuçları kısaca ele alalım.

Modeli Eksik Belirtme

- Atlanan değişken hatasını açıklamak için, aşağıdaki üç değişkenli modelin "doğru" olduğunu varsayalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- Bunun yerine ise aşağıdaki *"eksik belirtimli model"* (under specified model) kullanılsın:

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + v_i$$

- X_3'ün X_2'ye göre ikili bağlanımındaki eğim katsayısı b_{32} olsun. Bu durumda şu eşitliğin geçerli olduğu gösterilebilir:

$$E(\hat{\alpha}_2) = \beta_2 + \beta_3 b_{32}$$

- Eşitlik gösteriyor ki α_2, β_2'nin yanlı bir tahmincisidir.

- Örnek olarak, X_3'ün Y üzerindeki etkisi (β_3) ile X_3'ün X_2 üzerindeki etkisi (b_{32}) aynı anda artı değerli ise, $\hat{\alpha}_2$ yukarı doğru yanlı olacak ve gerçek β_2'den hep yüksek çıkacaktır.

- Şimdi de $\hat{\alpha}_2$'nın ve $\hat{\beta}_2$'nın varyanslarını karşılaştıralım:

$$\text{var}(\hat{\alpha}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2} \qquad \text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1 - r_{23}^2)}$$

- $\hat{\beta}_2$, her ne kadar yansız olsa da, daha büyük varyanslıdır. X_2 ve X_3 arasındaki eşdoğrusallığın göstergesi olan ilinti katsayısının karesi arttıkça, aradaki fark da artmaktadır.

- Anlaşılıyor ki yanlılık ve varyans arasında bir *"ödünleşim"* (trade off) bulunmaktadır.

- Bu durumda yüksek eşdoğrusallık altında X_3'ü modelden çıkartıp, yanlı olsa da, $\hat{\beta}_2$ yerine $\hat{\alpha}_2$ kullanmak yeğlenebilir.

- Diğer yandan, iktisat kuramına dayanarak oluşturulan bir modelden değişken çıkartmanın zorunlu kalmadıkça asla önerilmediği unutulmamalıdır.

Özetle, modelde bulunması gereken X_3 değişkenini atlamak şu sonuçları doğurmaktadır:

1. Hatalı modeldeki sabit terim mutlaka yanlıdır ve tutarsızdır. Diğer bir deyişle, örneklem büyüdükçe yanlılık yok olmaz.

2. Hatalı modeldeki diğer $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ katsayıları da yanlıdır.

3. Eğer X_3 ile atlanılmayan bir değişken arasındaki eğim sıfır ise (örneğimizdeki $b_{32} = 0$ durumu), o zaman katsayı yanlı olmaz. Ancak uygulamada bu durum neredeyse hiç yoktur.

4. Yanlı katsayı tahminlerinden dolayı alışıldık güven aralıkları ve önsav sınama sonuçları yanıltıcı olabilir.

5. Hatalı modelde varyanslar genellikle daha küçüktür. Ancak yanlılık sorunu olduğu için, hatalı modelin yeğlenebilmesi eşdoğrusallığın çok yüksek olduğu durumlar ile sınırlıdır.

Modeli Aşırı Belirtme

- İlgisiz değişken hatasınının sonuçlarını gösterebilmek için, şimdi de doğru modelin şu olduğunu varsayalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

- Araştırmacı ise aşağıdaki *"aşırı belirtimli"* (over specified) modeli kullanmakta diretiyor olsun:

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{3i} + v_i$$

İlgisiz değişken eklemenin katsayılar üzerindeki etkisi şöyledir:

1. Hatalı modeldeki tüm katsayı tahminleri yansız ve tutarlıdır.
2. Bu nedenle alışıldık güven aralıkları ve önsav sınamaları geçerlidir.
3. Diğer taraftan katsayılar etkin değildir. Diğer bir deyişle, varyanslar doğru modeldekilerden daha büyüktür.

- Aşırı belirtimli modeldeki $\hat{\alpha}_2$ tahmininin etkin olmadığını, varyansları karşılaştırarak görebiliriz:

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2} \qquad \text{var}(\hat{\alpha}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1 - r_{23}^2)}$$

- Doğru modelde X_3 olmadığı için paydada $(1 - r_{23}^2)$ teriminin yer almadığına dikkat ediniz.
- Hatalı modelde ise $\hat{\alpha}_2$ varyansı görece yüksek çıkacaktır.
- Aradaki fark X_3 ile X_2 arasındaki ilinti katsayısının karesi ile doğru orantılıdır.
- Demek ki ilgisiz bir değişken eklemek tahmin sonuçlarının kesinliğini azaltmak gibi ciddi bir sonuca yol açabilmektedir.
- Ayrıca, bilimde en az karmaşık açıklama yeğlendiği için, Model belirtiminde *"tutumluluk ilkesi"* (parsimony principle) her zaman özen gösterilmesi gereken önemli bir konudur.

Ölçüm Hataları

- Ölçüm hataları bir model belirtim hatası değildir. Ancak doğurabileceği sonuçlar ekonometrik modellemede ölçüm hatalarını da dikkate almayı gerekli kılar.

- Şimdiye kadar olan varsayımımızın aksine, çözümlemede kullandığımız veriler
  "kaydedici hatası" (clerical error),
  "atanan değerler" (assigned values),
  "yuvarlama" (rounding),
  "içdeğerleme" (interpolation),
  "dışdeğerleme" (extrapolation)
  gibi nedenlerden dolayı kesin doğru olmayabilir.

- İkincil kaynaklar tarafından yayınlanan verilerde yer alan hataları bilmek oldukça güçtür. Çoğu çalışma böyle verilere dayandığı için, uygulamada bu hata ile sıkça karşılaşılır.

Bağımlı Değişkendeki Ölçüm Hataları

- Bağımlı değişkendeki ve açıklayıcı değişkenlerdeki ölçüm hatalarının etkileri farklıdır. Öncelikle şu modele bakalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

- Burada Y Friedman tarafında öne sürülen *"kalıcı tüketim"* (permanent consumption) harcamasını, X ise cari geliri göstermektedir.

- Gerçekte kavramsal bir araç olan kalıcı tüketim doğrudan ölçülemediği için, elimizde, gözlenebilen tüketime dayalı şu değişken vardır:

$$Y_i^* = Y_i + v_i$$

- Yukarıdaki v, Y^*'daki ölçüm hatalarını gösteren rastlantısal bir terimdir.

- Y yerine Y^* kullanıldığında tahmin edilen model şu olur:

$$Y_i^* = \beta_1 + \beta_2 X_i + \epsilon_i$$

- Görülüyor ki yukarıdaki bağlanımda katsayılar aynı ve doğru şekilde tahmin edilebilmektedir.
- Diğer taraftan, $\epsilon_i = u_i - v_i$ biçimindeki bileşik hata teriminin varyansı daha yüksektir:

$$\text{var}(u_i - v_i) = \text{var}(u_i) + \text{var}(v_i) + 2\text{cov}(u_i,v_i)$$

- Öyleyse bağımlı değişkendeki ölçüm hataları katsayı nokta tahminlerini etkilememekte ancak güven aralıklarının geniş olmasına yol açarak etkinliği azaltmaktadır.

Açıklayıcı Değişkenlerdeki Ölçüm Hataları

- Açıklayıcı değişkende yer alan ölçüm hatalarına yönelik olarak, şimdi de şu modeli ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

- Bu modelde Y cari tüketim, X ise *"kalıcı gelir"* (permanent income) olarak tanımlanmıştır.
- Kalıcı gelir de doğrudan ölçülemediği için, uygulamada gözlenebilen gelire dayalı bir değişken tanımı kullanılır:

$$X_i^* = X_i + w_i$$

- Burada w_i, X_i^*'deki ölçüm hatasını göstermektedir.
- X yerine X^* kullanılması aşağıdaki modele yol açar:

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 + \beta_2 (X_i + w_i) + u_i \\ Y_i &= \beta_1^* + \beta_2^* X_i + z_i \end{aligned}$$

- Buradaki bileşik hata terimi $z_i = u_i + \beta_2 w_i$ biçimindedir.

- İçerdiği β_2 teriminden dolayı, z_i, KDBM'nin hata terimi ve açıklayıcı değişkenlerin ilişkisiz olduğu varsayımını çiğner.
- Öyleyse açıklayıcı değişkenlerdeki ölçüm hataları ciddi bir sorundur, çünkü yukarıdaki durumda SEK tahminleri hem yanlı hem de tutarsızdır.
- Bu yanlılık sorununu gidermek zordur. Başvurulabilecek bir yol *"araç değişkenler"* (instrumental variables) yöntemidir.
- Eğer ölçüm hataları küçükse, ki bunu bilebilmek güçtür, uygulamada sorunu gözardı etmek zorunda kalınabilir.
- En doğru yol hatasız, doğru ölçülmüş verilerle çalışmaktır.

6.2 Belirtim Hatalarının Sınanması

Görgül çalışmada kullanılan modelin "doğru" olduğu kesinlikle bilinemez. Bu nedenle, önce kurama dayanılır ve bir konunun özünü yakaladığı düşünülen model belirtilip tahmin edilir. Daha sonra eldeki model çeşitli sınamalar ve almaşık modeller ile karşılaştırılarak değerlendirilir ve yeterliliğine karar verilir. Uygulamada modelleme sorunlarını saptamada kullanılabilecek geleneksel yöntemlerden bazıları şunlardır:

- Kalıntıların incelenmesi
- Katsayı anlamlılık sınamaları
- Ramsey RESET sınaması
- Lagrange Çarpanı sınaması

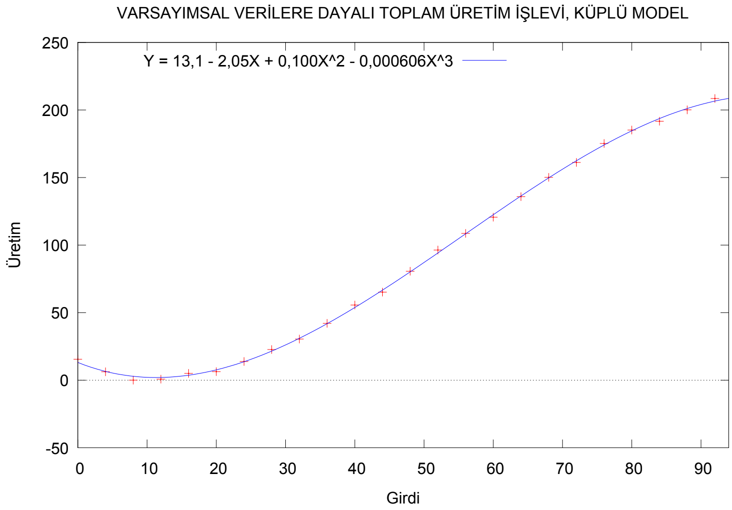
- Konuya ilişkin olarak toplam üretim maliyeti örneğini ele alalım. "Doğru" model aşağıdaki küplü işlev olsun:

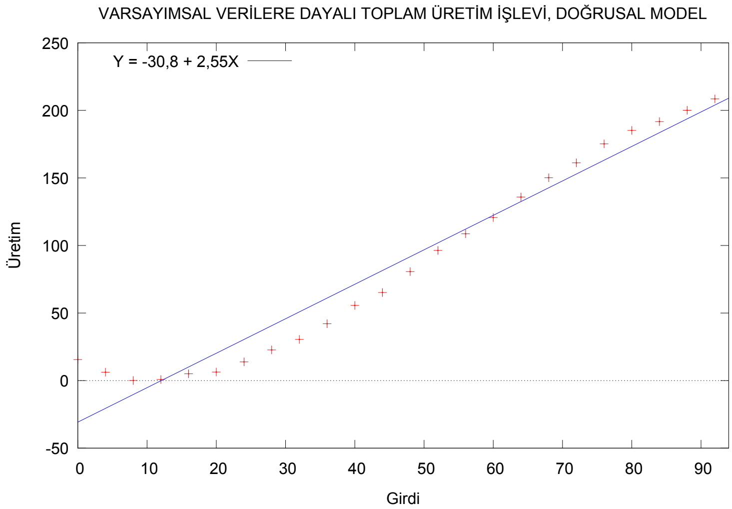
$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 X_i^2 + \beta_4 X_i^3 + u_i$$

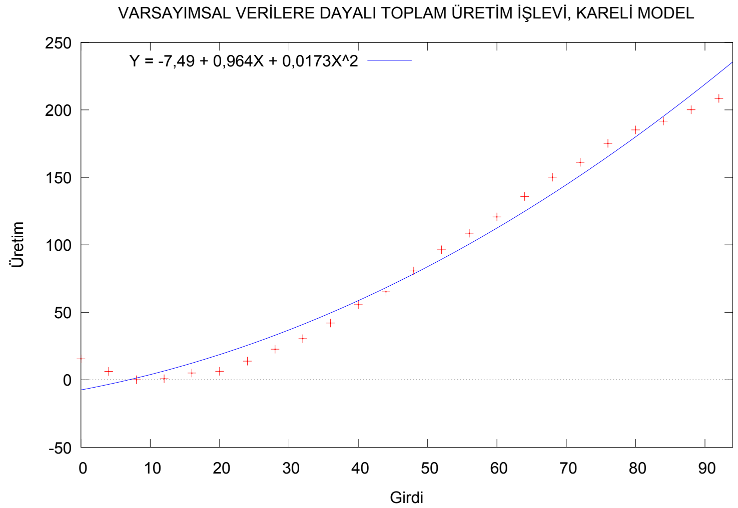
- Yukarıdaki model "doğru" olduğuna göre, aşağıda verilen doğrusal ve kareli modelleri kullanmak belirtim hatasına yol açacaktır:

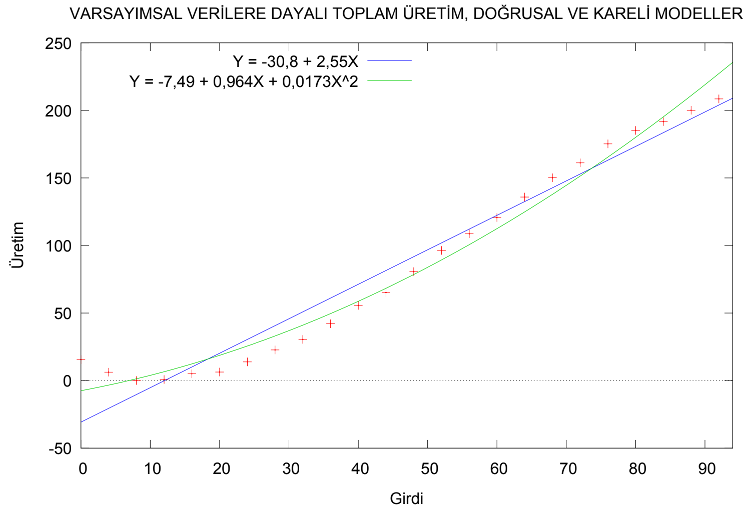
$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + v_i$$
$$Y_i = \lambda_1 + \lambda_2 X_i + \lambda_3 X_i^2 + w_i$$

- Varsayımsal veriler kullanarak hatalı belirtimin yol açtığı yakıştırma sorunlarını sınayalım.


VARSAYIMSAL VERİLERE DAYALI TOPLAM ÜRETİM İŞLEVİ, KÜPLÜ MODEL
Y = 13,1 - 2,05X + 0,100X^2 - 0,000606X^3
Üretim
Girdi
250
200
150
100
50
0
-50
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90


VARSAYIMSAL VERİLERE DAYALI TOPLAM ÜRETİM İŞLEVİ, DOĞRUSAL MODEL
Y = -30,8 + 2,55X
Üretim
Girdi
250
200
150
100
50
0
-50
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90

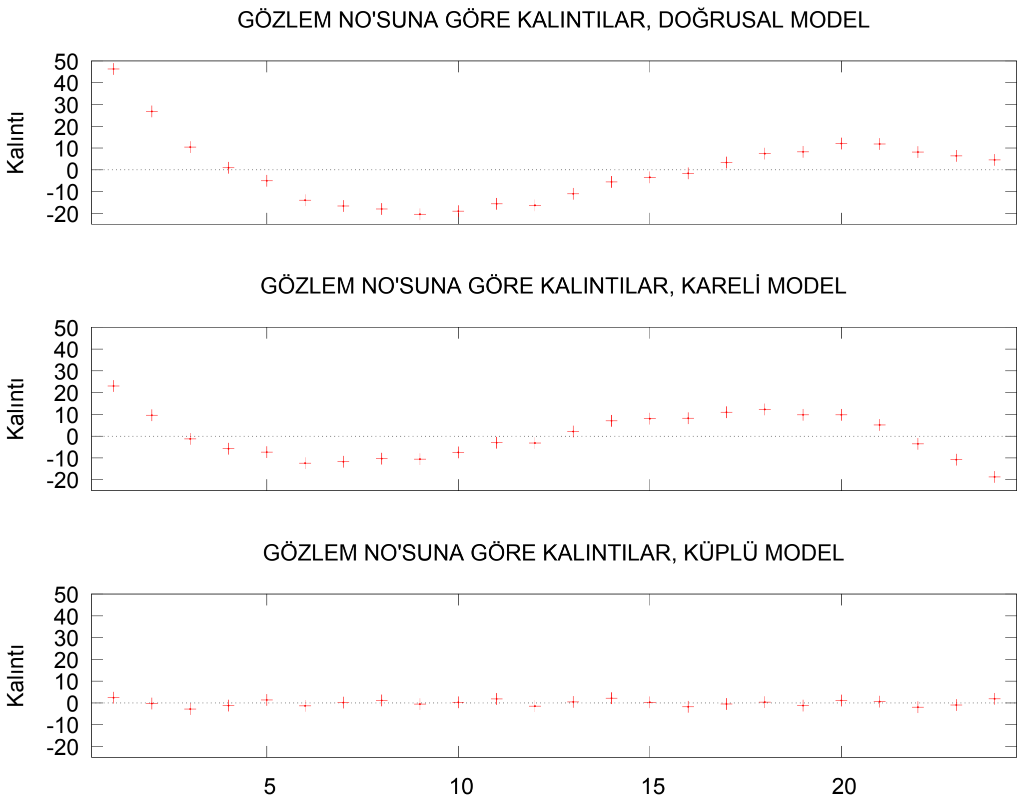




6.2.1 Kalıntıların İncelenmesi

- Bağlanım kalıntıları, özellikle de yatay kesitsel verilerde, model belirtim hatalarını saptamak için yararlı bir görsel tanı aracıdır.
- Önemli bir değişkenin atlanması ya da yanlış işlev biçimi seçimi gibi sorunlar olduğunda kalıntılar da dikkat çekici örüntüler sergiler.
- Bir sonraki sayfada görüleceği üzere, hatalı yakıştırılan doğrusal ve kareli modellere ait kalıntı çizitleri çevrimsel salınımlar göstermektedir.

- Kareli modelde kalıntılar doğrusal bağlanıma göre belirgin biçimde azalmaktadır. Doğru yakıştırılan küplü modelde ise kalıntılar iyice azalmakta ve dalga görüntüsü de ortadan kaybolmaktadır.



6.2.2 Katsayı Anlamlılık Sınamaları

- Modelde yer alan ilgisiz bir değişkenin yanlı tahminlere yol açmayıp, yalnızca katsayı varyanslarının büyümesi gibi daha az ciddi bir soruna yol açtığını anımsayalım.

- Bu nedenle aşırı belirtimin sınanması ve düzeltilmesi eksik belirtim sorunu yanında görece daha kolaydır.

- Aşağıdaki modeli ele alalım:

$$Y_i = \gamma_1 + \gamma_2 X_i + \gamma_3 X_i^2 + \gamma_4 X_i^3 + \gamma_5 X_i^4 + z_i$$

- Bu modelde X^4 değişkenin gerçekten anlamlı bir katkıda bulunup bulunmadığını saptamak için alışıldık t ve F sınamalarından yararlanılabilir.

- Örnek olarak, küplü model şu sonuçları vermektedir:

$$\begin{array}{lcccc} \hat{Y}_i = & 13{,}1307 & -\ 2{,}0503\, X_i & +\ 0{,}1009\, X_i^2 & -\ 0{,}0006\, X_i^3 \\ \text{öh} & (1{,}0705) & (0{,}1030) & (0{,}0026) & (1{,}88\text{e–}05) \\ p & (9{,}21\text{e–}11) & (1{,}17\text{e–}14) & (3{,}38\text{e–}20) & (1{,}01\text{e–}18) \end{array}$$

- İlgisiz değişken içeren modele ait tahminler ise şöyledir:

$$\begin{array}{lccccc} \hat{Y}_i = & 14{,}2905 & -\ 2{,}3622\, X_i & +\ 0{,}1169\, X_i^2 & -\ 0{,}0009\, X_i^3 & +\ 1{,}49\text{e–}06\, X_i^4 \\ \text{öh} & (1{,}1463) & (0{,}1805) & (0{,}0082) & (0{,}0001) & (7{,}32\text{e–}07) \\ p & (1{,}36\text{e–}10) & (5{,}93\text{e–}11) & (1{,}44\text{e–}11) & (3{,}27\text{e–}06) & (0{,}0558) \end{array}$$

- Görüldüğü gibi, aşırı belirtimli modelde yer alan γ_5 tahmini büyüklük olarak sıfıra çok yakındır ve $\alpha = 0.05$ düzeyinde anlamlı da değildir.
- Bu noktada, X^4'ün yanında X^3 değişkeninin de ilgisiz olup olmadığını anlamak istersek $H_0 : \gamma_4 = \gamma_5 = 0$ sınırlamasını F sınaması ile sınayabiliriz.
- Bu doğrultuda hesaplanan $F = 604{,}4$ sınama istatistiğinin p değeri $6{,}327 \times 10^{-18}$ olduğu için, sıfır önsavı reddedilir.

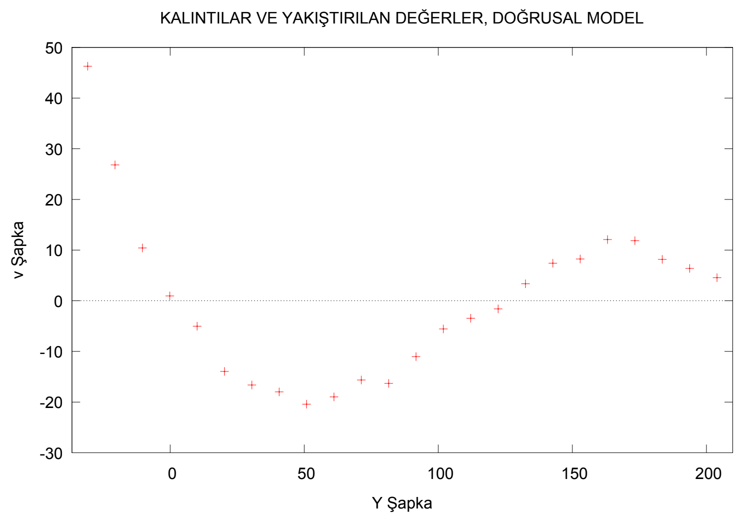
6.2.3 RESET ve LÇ Sınamaları

Ramsey RESET Sınaması

- Modelleme hatalarına ilişkin olarak J.B. Ramsey *"Bağlanım Denklemi Belirtim Hatası Sınaması"* (Regression Equation Specification Error Test), kısaca RESET adını verdiği genel bir sınama önermiştir.
- Bu sınama yaklaşımını açıklamak için $\sum \hat{u}_i$ ve $\sum \hat{u}_i\hat{Y}_i$'nın zorunlu olarak sıfır olduğunu anımsayalım ve toplam üretim işlevi örneğimizdeki doğrusal modele geri dönelim:

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + v_i$$

- Yukarıdaki hatalı modele ait $\hat{v}_i$ kalıntılarını alıp yakıştırılan $\hat{Y}_i$'lere karşı çizersek, düzenli bir örüntü ortaya çıkar.
- Bu durum ise yakıştırılan değerler ilk bağlanımda açıklayıcı değişken olarak dikkate alınırlarsa R^2'nin yükseleceği anlamına gelir.



Ramsey RESET sınamasının adımları şöyledir:

1. Sınanacak model tahmin edilir ve yakıştırılan değerler kaydedilir.
2. Önceki çizitte de görülebildiği gibi, $\hat{v}$ ve $\hat{Y}$ arasındaki ilişki doğrusal-dışı olabilmektedir. Bu nedenle $\hat{Y}_i$'ların kareleri ve gerekli olduğu düşünülüyorsa küpleri ilk modele açıklayıcı değişkenler olarak katılır ve bağlanım yeniden hesaplanır.
3. Yeni modele eklenen değişkenlerin R^2'yi anlamlı biçimde artırıp artırmadığı bilindik F sınaması ile sınanır:

$$F = \frac{(R^2_{yeni} - R^2_{eski})/m}{(1 - R^2_{yeni})/(n-k)}$$

4. Hesaplanan F sınama istatistiği anlamlı ise, belirtim hatası olmadığını öne süren sıfır önsavı reddedilir.

Lagrange Çarpanı Sınaması

- *"Lagrange çarpanı"* (Lagrange multiplier) ya da kısaca *"LÇ"* (LM), RESET sınamasına benzeyen almaşık bir yöntemdir.
- Adından, kısıtlamalı bir eniyileme sorusundaki Lagrange çarpanları yöneyine dayandığı anlaşılan LÇ, uygulamada seyrek olarak bu yolla hesaplanır.
- Sınamada bağımlı değişken olarak tahmin edilen hatalar kullanılır ve bunların X'ler ve X^2, X^3 gibi değişkenlere göre bağlanımı tahmin edilir.

- Hata teriminin sıfır ortalamalı ve özilintisiz beyaz gürültü olduğu varsayımı nedeniyle, açıklayıcı değişkenler anlamlı olmamalıdır.
- *Dikkat:* LÇ kavuşmazsal bir sınamadır. Diğer bir deyişle, sonucuna ancak büyük örneklemlerde güvenilebilir.
- *Dikkat:* Kullanılan ek değişken sayısına özen gösterilmeli ve aşırı belirtimli bir modeli sınamaktan kaçınılmalıdır.

SEK'in aynı zamanda EO tahmincisi olduğunun varsayılabildiği durumlar için, LÇ sınamasının adımları şöyledir:

1. Model tahmin edilir ve $\hat{v}_i$ kalıntıları kaydedilir.
2. Model eğer hatalı ise, eldeki kalıntıların doğru modelde yer alması beklenen terimler ile ilişkili olması gereklidir. Buna göre, örnek olarak, şu yardımcı bağlanım hesaplanabilir:

$$\hat{v}_i = \theta_1 + \theta_2 X_i + \theta_3 X_i^2 + \theta_4 X_i^3 + \epsilon_i$$

3. Yukarıdaki bağlanıma ait gözlem sayısı ve R^2 çarpımının kavuşmazsal olarak dışlanacak değişken sayısı kadar sd ile χ^2 dağılımına uyduğu gösterilmiştir. Doğrusal-dışılık sınandığı için X kalır, X^2 ve X^3 ise dışlanır.
4. nR^2 çarpımı hesaplanır. Bu sınama istatistiği anlamlı ise, sınırlı bağlanımın doğru olduğu sıfır önsavı reddedilir ve baştaki modelde belirtim hatası olduğu sonucuna varılır.

6.3 Modellemeye İlişkin Konular

6.3.1 Yuvalı-Dışı Modellerin Sınanması

- Model belirtim sınamaları bağlamında, *"yuvalı"* (nested) ve *"yuvalı-dışı"* (non-nested) model ayrımı önemlidir.
- Şu iki modeli ele alalım:

$$\text{Model A}: Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + u_i$$
$$\text{Model B}: Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 X_2 + \alpha_4 X_3 + v_i$$

- Model A, B içinde yuvalıdır çünkü onun özel bir durumudur.
- Şimdi de aşağıdaki modelleri karşılaştıralım:

$$\text{Model C}: Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + \beta_3 X_2 + u_i$$
$$\text{Model D}: Y_i = \beta_1 + \beta_2 Z_1 + \beta_3 Z_2 + v_i$$

- Model C ve Model D yuvalı-dışıdır çünkü biri diğerinin özel bir durumu olarak türetilemez.
- Böyle modeller arasında karşılaştırma yapmak için alışıldık t ve F sınamalarından farklı bir yaklaşım gereklidir.
- Model C ve Model D gibi iki yuvalı-dışı model arasında seçim yapmak için kullanılabilecek bir yaklaşım, aşağıdaki *"melez"* (hybrid) modeli tahmin etmektir:

$$\text{Model E}: Y_i = \lambda_1 + \lambda_2 X_1 + \lambda_3 X_2 + \lambda_4 Z_1 + \lambda_5 Z_2 + w_i$$

- Görüldüğü gibi, yukarıdaki model diğer iki modele yuvadır.
- Bu durumda, eğer $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ koşulu geçerli ise Model D doğrudur. Eğer $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ geçerliyse Model C doğru olur.
- Her iki koşul da alışıldık F sınaması ile kolayca sınanabilir. Bu sınamaya *"yuvalı-dışı F sınaması"* (non-nested F test) adı verilir.
- Uygulaması kolay olsa da yuvalı-dışı sınamaların bazı sakıncaları da vardır.

- Öncelikle X ve Z'lerin yüksek ilintili olma olasılığı vardır ve bu da çoklueşdoğrusallık sorununa yol açar.
- Model C'yi temel alalım ve buna Z_1 ve Z_2'yi ekleyelim. Eğer bu değişkenler R^2'yi anlamlı biçimde yükseltmezse, Model D'yi reddederiz. Ancak eğer Model D'yi temel alıp X_1 ve X_2'nin katkısını anlamlı bulmazsak, bu sefer de Model C'yi reddederiz. Yani sonuç ilk modele göre değişebilmektedir.
- Son olarak, yapay olarak belirtilen F yuva modeli büyük bir olasılıkla iktisadi anlam içermeyecektir.

6.3.2 Model Seçim Ölçütleri

Yuvalı olsun ya da olmasın, almaşık modeller arasında seçim yapmak için bir yöntem de belli bir ölçüyü temel almaktır. Araştırmacılar tarafından başvurulan yaygın *"model seçim ölçütleri"* (model selection criteria) şöyle sıralanabilir:

- *"R-kare Ölçütü"* (R-square Criterion, R^2)
- *"Ayarlamalı R-kare"* (Adjusted R-square, $\bar{R}^2$)
- *"Akaike Bilgi Ölçütü"* (Akaike Information Criterion, AIC)
- *"Bayesçi Bilgi Ölçütü"* (Bayesian Information Criterion, BIC)
- *"Hannan-Quinn Ölçütü"* (Hannan-Quinn Criterion, HQC)

Tüm bu ölçütler KKT'yi enazlamaya dayanır. Ayrıca, R^2 dışında hepsi de açıklayıcı değişken sayısında *"tutumlu"* (parsimonious) olmayı ödüllendiricidir. AIC, BIC ve HQC özellikle zaman serileri modellerinde gecikme uzunluğunu saptamada yaygın olarak kullanılmaktadır.

R-kare Ölçütü

- Bilindiği gibi, R^2 belirleme katsayısı 0 ve 1 arası değerler alır ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$R^2 = \frac{\text{BKT}}{\text{TKT}} = 1 - \frac{\text{KKT}}{\text{TKT}}$$

- R^2 ölçütünün başlıca sakıncası, bunun bir *"örneklem içi"* (in sample) yakışmanın iyiliği ölçütü olmasıdır.

- Diğer bir deyişle, R^2'si yüksek diye modelin *"örneklem dışı"* (out of sample) gözlemleri iyi yordayacağına güvenilemez.
- İkinci bir zayıf nokta ise iki R^2'nin karşılaştırılabilmesi için bağımlı değişkenlerin aynı olması zorunluluğudur.
- Son olarak, modele yeni bir değişken eklendiğinde aslında yordama hata varyansları artıyor olsa da R^2 yükselir.

Ayarlamalı R-kare Ölçütü

- 1971 yılında Henry Theil tarafından geliştirilen ayarlamalı R-kare tanımını anımsayalım:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\text{KKT}/(n-k)}{\text{TKT}/(n-1)} \quad \text{ya da} \quad = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}$$

- Bilindiği üzere burada n örneklem büyüklüğünü ve k de açıklayıcı değişken sayısını göstermektedir.
- Yukarıda görüldüğü gibi, $\bar{R}^2$ modele açıklayıcı değişken eklemeyi cezalandırır ve bu nedenle R^2'den küçük çıkar.
- Modeller arası karşılaştırma açısından $\bar{R}^2$ daha iyidir ama karşılaştırmanın geçerli olabilmesi için burada da bağımlı değişkenlerin aynı olması zorunluluğu unutulmamalıdır.

Akaike Bilgi Ölçütü

- Akaike ölçütünü 1974 yılında Hirotugu Akaike geliştirmiştir.
- Birden çok AIC tanımı vardır. Enküçük kareler tahmininde gretl, Akaike'nin kendi tanımına dayalı şu formülü kullanır:

$$\text{AIC} = -2\ell(\hat{\theta}) + 2k$$

- Burada $\ell(\hat{\theta})$, değiştirge tahminlerinin bir işlevi olan ençok log olabilirliği göstermektedir.
- AIC ne kadar küçükse yakışma da o kadar iyidir. Modeller karşılaştırılırken AIC değeri düşük olan yeğlenir.

- $2k$ teriminin AIC değerini yükselttiğine ve böylece değişken eklemeyi ($\bar{R}^2$'den daha çok) cezalandırdığına dikkat ediniz.
- AIC ölçütünün en büyük üstünlüğü hem örneklem içi hem örneklem dışı başarımı karşılaştırmada kullanılabilmesidir.
- Hem yuvalı hem yuvalı-dışı modellerde yararlıdır.

Bayesçi Bilgi Ölçütü

- Bu ölçüt 1978 yılında Gideon Schwarz tarafından önerildiği için Schwarz ölçütü olarak da bilinir. Formülü şudur:

$$\text{BIC} = -2\ell(\hat{\theta}) + k \log n$$

- Örneklemle birlikte $\ell(\hat{\theta})$ da arttığından dolayı, modele yeni eklenen bir değişken için AIC ölçütünün verdiği ceza büyük örneklemlerde yetersiz kalabilmektedir.
- BIC ise, AIC formülü ile karşılaştırılınca görülebildiği gibi, modele değiştirge eklemeyi daha ciddi şekilde cezalandırır.

Hannan-Quinn Ölçütü

- Tutumlu modelleri AIC'ten daha fazla ödüllendiren bir diğer ölçüt de 1979 yılında Hannan ve Quinn tarafından önerilen HQC'dir:

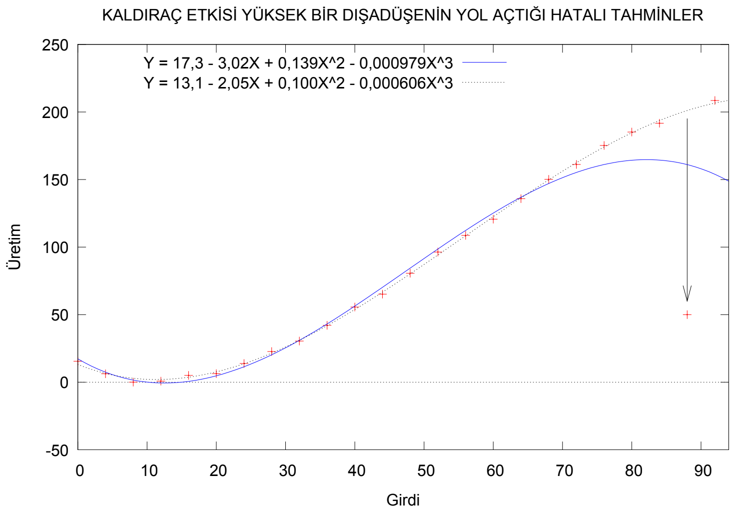
$$\text{HQC} = -2\ell(\hat{\theta}) + 2k \log \log n$$

- Hannan ve Quinn, yinelemeli logaritma kanununa dayanan HQC'nin almaşıklarından üstün olduğunu savunmuşlardır.
- HQC kullanımı, diğer iki ölçüt gibi yaygındır. Ancak, bu üç ölçütten birinin diğerlerinden üstün olduğu tartışmalıdır.
- AIC, BIC, ve HQC hesaplamasında kullanılan formüller bilgisayar yazılımından yazılımına farklılık gösterebildiği için, asıl önemli olan nasıl yorumlanacaklarını bilmektir.
- Gretl'da her üç ölçüt için de küçük değerler daha iyidir.

6.3.3 Dışadüşenler ve Eksik Gözlemler

Dışadüşenler

- Modelleme açısından önemli bir başlık da *"dışadüşenler"* (outliers) konusudur.
- $\hat{u}_i = (Y_i - \hat{Y}_i)$ şeklinde tanımlanan kalıntıların, bağlanım doğrusuna olan dikey uzaklığı gösterdiğini anımsayalım.
- Belli bir model bağlamında, diğer gözlemlere oranla fark edilir şekilde büyük kalıntıya sahip gözlemlere dışadüşen denir.
- Bu tür gözlemler önemlidir çünkü kaldıraç etkisi yaratarak bağlanım doğrusunu kendilerine doğru çekebilirler.
- Bağlanım doğrusunu kayda değer biçimde değiştiren böyle gözlemlere *"etkili gözlem"* (influential variable) adı verilir.
- *Dikkat:* Belli bir veri setinde birden fazla dışadüşen olabilir.
- Dışadüşenleri saptamanın en temel yolu çizim yöntemidir çünkü bu gözlemler bağlanım doğrusundan uzaklıklarıyla dikkat çekerler.
- Biçimsel yöntemler de vardır. Gretl ve benzer ekonometri yazılımlarında, etkili gözlemleri bulmaya ve bunlara ait kaldıraç etkisini hesaplamaya yönelik işlevler de bulunur.
- Saptandıktan sonra, dışadüşenler konusunda nasıl bir yol izleneceğine karar vermek daha zor bir sorudur.
- Basitçe dışadüşenleri örneklemden çıkartmak ve geriye kalan gözlemlere odaklanmak düşünülebilir.
- Diğer taraftan, dışadüşen gözlemin sıradışı bir durumdan kaynaklandığı ve diğer gözlemler tarafından sağlanamayan bir bilgi içerebileceği de unutulmamalıdır.



Eksik Gözlemler

Uygulamada kimi zaman karşılaşılan bir durum da veri setinde *"eksik gözlemler"* (missing observations) bulunmasıdır. Bu durumun nedenleri şunlar olabilir:

- Anket verilerinde katılımcıların yanıtsız bıraktığı sorular
- Panel veri setlerinde zaman içerisinde ayrılan katılımcılar
- Güvenlik ya da özel bilgilerin korunması amacıyla gizli tutulan gözlemler
- Çeşitli ekonomik ya da siyasi nedenlerle bazı dönemlerde yapılamayan anketler ya da hesaplanmayan makro veriler

Veri setinde bir değer bile eksik olsa bağlanım hesaplanamaz. Özellikle küçük örneklemlerde eksik veriler veri setinin daha da küçülmesi gibi ciddi bir soruna neden olabilirler.

- Farklı ailelerin tüketimlerini gelir, servet, eğitim gibi çok sayıda değişken ile açıklayan bir model düşünelim.
- Anket verilerinde ise farklı X değişkenleri için farklı birkaç aileye ait gözlemlerde eksiklik olsun.
- Diğer tüm bilgiler tamken, örnek olarak, yalnızca eğitim verisi eksik olan aile veri setinden çıkarılmak zorundadır.
- Böyle ailelerin varlığı örneklemi gözle görülür biçimde küçültebileceği gibi yanlılığa da neden olabilir.

- Örneklemi küçültmek yerine, eksik olan birkaç veri atama yolu ile tamamlanabilir.
- *"Atanan değerler"* (assigned values), eksiği olan değişkene ait örneklem ortalama ya da ortanca değeri olabilir.
- *Dikkat:* Dışadüşenler ve eksik gözlemler konusunda atılan adımlar, sonuçlar raporlanırken mutlaka açıklanmalıdır.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 13* "Econometric Modeling: Model Specification and Diagnostic Testing" okunacak.

Önümüzdeki Ders
Nicel Tepki Bağlanım Modelleri

Bölüm 7

Nitel Tepki Bağlanım Modelleri

7.1 Nitel Tepki ve Doğrusal Olasılık Modeli

7.1.1 Nitel Bağımlı Değişkenler

- Daha önceki bölümlerde açıklayıcı değişken olarak nicel ya da nitel değişkenler kullanılabileceğini görmüştük.
- Bağımlı değişken ise bir nicel değişken olmak zorunda idi.
- Bu bölümde, bağımlı değişkeni sınırlı değerler alan, örnek olarak bir kukla değişken olabilen modelleri ele alacağız.
- Bu tür modellere özgü bazı tahmin sorunlarını incelerken, almaşık nitel tepki modellerini de tanıtacağız.

Bağımlı değişkenin 0 ve 1 gibi yalnızca iki değer alabileceği modellere ilişkin olarak şu örnek konu başlıkları gösterilebilir:

- Ev sahibi olup olmamayı belirleyen etmenler
- Sendika üyesi olup olmamanın nedenleri
- Bir kredi başvurusunun reddedilip reddedilmeyeceği
- Bir seçimde evet ya da hayır oyunu nelerin belirlediği
- İşgücüne katılıp katılmamanın nelerden etkilendiği
- Kişilerin sigorta yaptırıp yaptırmayacakları
- Şirketlerin hisse senedi çıkartıp çıkartmayacakları

- Şirketlerin ele geçirilmeye hedef olup olmayacakları
- Bir ülkede idam cezasının olup olmayacağı

7.1.2 Doğrusal Olasılık Modeli

- Nitel bağımlı değişkene örnek olarak şu modeli ele alalım.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

- Burada X hanehalkının gelirini göstermektedir.
- $Y = 1$, aile ev sahibi ise; $Y = 0$, eğer değilse.
- Bir kukla değişken olan Y'yi X açıklayıcı değişken(ler)inin doğrusal işlevi olarak belirten yukarıdaki gibi modellere *"doğrusal olasılık modeli"* (linear probability model), ya da kısaca *"DOM"* (LPM) adı verilir.
- Bu modellerde X_i veriliyken Y_i'nin koşullu beklenen değeri, olayın gerçekleşme koşullu olasılığı olarak yorumlanabilir.
- Eldeki modele doğrusal olasılık denilme nedenini görmek için $E(u_i) = 0$ varsayımını anımsayalım ve şunu yazalım:

$$E(Y_i|X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$$

- $Y_i = 1$ olduğunda olayın gerçekleştiğini ve bunun olasılık değerinin de P_i olduğunu söyleyelim. Bu durumda, Y'nin olasılık dağılımı şöyledir:

Y	Olasılık
0	$1 - P_i$
1	P_i
Toplam	1

- Beklenen değer tanımından yararlanarak şunu görebiliriz:

$$E(Y_i) = 0(1 - P_i) + 1(P_i) = P_i$$

- P_i bir olasılık olduğu için burada $0 \leq E(Y_i|X_i) \leq 1$ şeklinde bir sınırlama olduğu unutulmamalıdır.

7.1.3 DOM Tahminindeki Güçlükler

Yukarıda gördüklerimiz, SEK yönteminin kolaylıkla nitel bağımlı değişkenler için de kullanılabileceği kanısını uyandırıyorsa da durum gerçekte böyle değildir. DOM tahmini, aşağıda gösterilen dört sorunu da beraberinde getirmektedir.

1. Bozukluk terimi u'nun normal-dışılığı
2. Bozukluklarda farklıserpilimsellik görülmesi
3. R^2'nin yakışma ölçütü olarak kuşkulu değeri
4. $0 \leq E(Y_i|X_i) \leq 1$ koşulunun sağlanamaması

Bozukluk Terimi u'nun Normal-dışılığı

- DOM tahmininde u_i'lerin normal dağılması olanaksızdır.
- Aşağıda da görüldüğü gibi, Y_i'ler yalnızca 2 değer aldıkları için, 2 farklı u_i kümesi ortaya çıkar.

$$u_i = Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i$$

$Y_i = 1$	ise	$u_i = 1 - \beta_1 - \beta_2 X_i$
$Y_i = 0$	ise	$u_i = -\beta_1 - \beta_2 X_i$

- Bu durumda u_i'ler normal dağılımı değil, kesikli Bernouilli dağılımını izlerler.
- Diğer taraftan, nokta tahminleri yansız olmayı sürdürürler.
- Ayrıca merkezi limit kanıtsavına göre örneklem büyüklüğü artarken kalıntıların normale yaklaşacağı unutulmamalıdır.
- Dolayısıyla, büyük örneklemlerde u'nun normal-dışılığı tahmin ve çıkarsama açısından bir sorun yaratmayabilir.

Bozukluklarda Farklıserpilimsellik

- Bozuklukların Bernouilli dağılımına uyduğu bilindiğine göre, DOM tahmininde u_i'lerin aynıserpilimsel olduğu varsayımını korumak da olanaksızdır.
- Anımsayacak olursak, ikiterimli dağılımın genel biçimi olan Bernoulli dağılımının ortalaması p, varyansı $p(1-p)$'dir.

- Buna göre, doğrusal olasılık modelinin varyansı da şu olur.

$$\text{var}(u_i) = P_i(1 - P_i)$$

- $P_i = E(Y_i|X_i) = \beta_1+\beta_2 X_i$ olduğuna göre, u_i sonuçta X_i değerlerine bağlıdır ve bu nedenle aynıserpilimsel olamaz.
- Farklıserpilimsellik altında SEK tahminlerinin yansız olmayı sürdürürken enaz varyanslı olamadıklarını anımsayalım.
- Büyük örneklemlerde bu da DOM için sorun olmayabilir. Farklıserpilimsellik ağırlıklı en küçük kareler ya da White ölçünlü hataları kullanılarak aşılmaya çalışılabilir.

R^2'nin Yakışma Ölçütü Olarak Kuşkulu Değeri

- Nitel bağımlı değişkenler, tanım gereği, gözlenen Y_i'lerin yalnızca kesikli 0 ve 1 değerlerini alabilmeleri demektir.
- DOM tahmininden elde edilen $\hat{Y}_i$'ler ise yakıştırılan doğru üzerinde farklı ve sürekli değerler alabilirler.
- DOM'ların böyle bir serpilime iyi yakışması beklenemez.
- Bu nedenle, DOM tahmininde R^2 genellikle düşük çıkar. Uygulamada genellikle 0.2 ile 0.6 arası değerler beklenir.
- Genel olarak, her türden nitel bağımlı değişken modelinde belirleme katsayısı R^2'yi bir özet istatistik olarak kullanmak sakıncalı kabul edilmektedir.

$0 \leq E(Y_i|X_i) \leq 1$ Koşulunun Sağlanamaması

- DOM tahminine ilişkin asıl ciddi bir sorun, $0 \leq E(Y_i|X_i) \leq 1$ koşulunun sağlanamamasıdır.
- Bu modeller X veriliyken Y olayının gerçekleşme koşullu olasılığını ölçtüğü için, $E(Y_i|X_i)$ değerinin 0 ile 1 arasında yer alması önemlidir.
- SEK yöntemi böyle bir matematiksel sınırlama içermediği için, DOM tahmini sonrasında yakıştırılan değerlerin eksi değerli ya da 1'den büyük çıkmasına sıkça rastlanır.

- Böyle durumlarda eksi değerli $\hat{Y}_i$'leri sıfır, 1'den büyük $\hat{Y}_i$'leri ise 1 varsaymak yoluna gidilebilir.
- Ancak böyle sakıncalı ek varsayımlara gerek yoktur çünkü tahmin edilen olasılıkların 0 ve 1 arasında olmasını güven altına alan almaşık yöntemler bulunmaktadır.

DOM Açıklayıcı Örnek

- Açıklayıcı örnek olarak, çoğu ilde tek bir "ticaret ve sanayi odası" varken, bazı büyük illerde ise sanayi odasının ayrı bir kuruluş olarak hizmet verdiğini göz önüne alalım.
- Bir ilde sanayi odası olup olmayacağını sanayi sektöründe faaliyet gösteren firma sayısı ile açıklamak istiyor olalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

- X_i burada toplam firma sayısını (100 birim) göstermektedir.
- $Y_i = 1$, ilde sanayi odası var ise; $Y_i = 0$, eğer yok ise.
- Önsel beklentimiz, $\hat{\beta}_2$'nın artı değerli ve $(0{,}1)$ aralığında tahmin edileceği yönündedir.

- TOBB Sanayi Veri Tabanı verilerine dayalı DOM bağlanım sonuçları aşağıdaki gibidir.

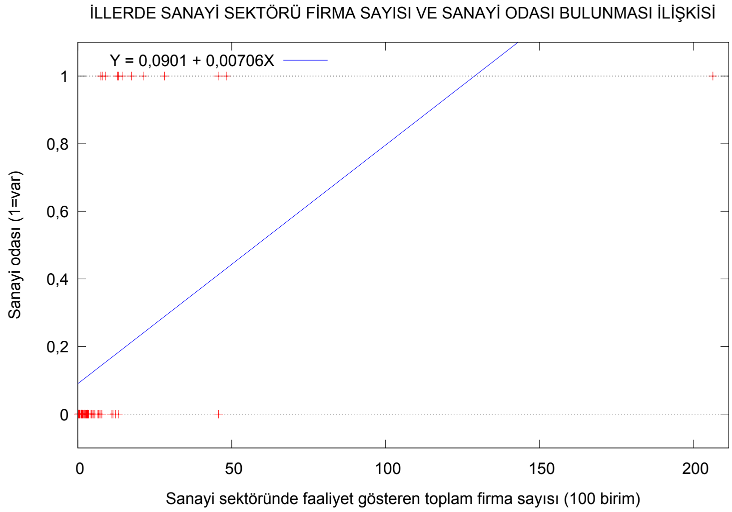
$$\begin{array}{llll} \hat{Y}_i = & 0{,}0901 & +\,0{,}0070\,X_i & \\ \text{öh} & (0{,}0376) & (0{,}0015) & \\ t & (2{,}3933) & (4{,}8092) & r^2 = 0{,}2287 \end{array}$$

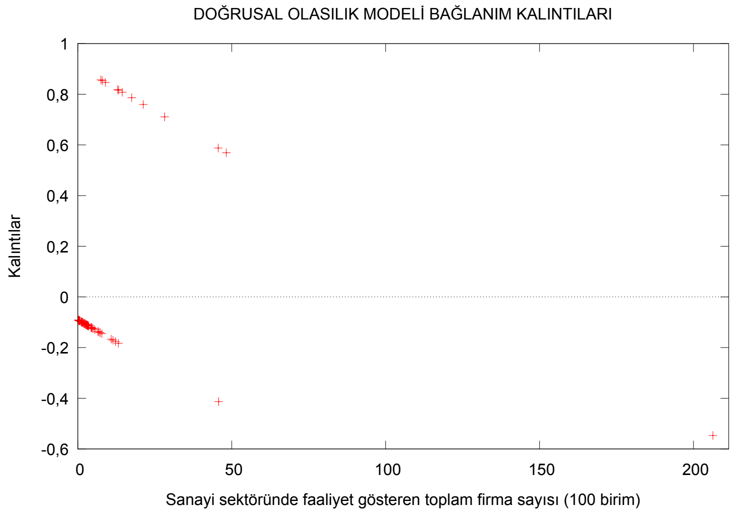
- Sonuçlar, ilde açılacak her 100 yeni firmanın sanayi odası kurulma olasılığını yüzde 0,7 artıracağını göstermektedir.
- İlişki doğrusal tahmin edildiği için, ilde firma sayısı 1000 de olsa 5000 de olsa olasılığın aynı kaldığı varsayılmaktadır.
- Kukla bağımlı değişkene bir doğru yakıştırmak güç olduğu için, r^2 değeri beklenildiği gibi düşük bulunmuştur.

- Ayrıca, toplam 20601 sanayi firması bulunan İstanbul için tahmin edilen olasılık 1'den büyük çıkmaktadır:

$$0{,}0901 + (0{,}0070 \times 206{,}01) = 1{,}547$$

- Y_i'ye bağlı iki ayrı kalıntı kümesi olduğundan, hataların normal dağılması da söz konusu değildir.

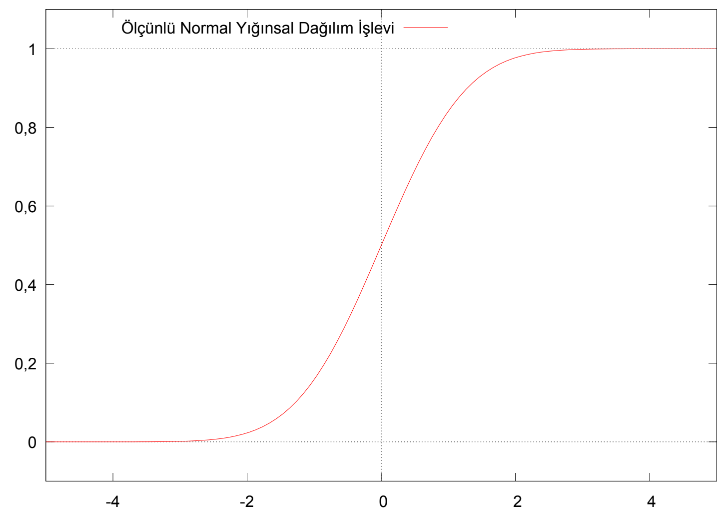




7.2 Doğrusal-Dışı Yaklaşım ve Olabirim Modeli

7.2.1 Doğrusal Olasılık Modelinin Almaşıkları

- Yukarıda tartışılan teknik sakıncalar bir yana, doğrusal olasılık modelinin en önemli sorunu mantıksaldır.
- DOM tahminine göre $P_i = E(Y = 1|X)$ olasılığı doğrusal olarak artmaktadır. Bu çekici bir varsayım değildir.
- Örnek olarak, belirli bir firma sayısının altında sanayi odası kurulma olasılığı hızla düşer. Aynı şekilde yüksek bir firma sayısı, ilde sanayi odasının bulunma olasılığını artırır ama aşırı yüksek firma sayısının marjinal etkisi azdır.
- Dolayısıyla, bize gereken modelde olasılık asla $[0,1]$ aralığı dışına çıkmazken, ayrıca, başta artarak artmalı ve belirli bir noktadan sonra ise azalarak artan bir yapı göstermelidir.
- Geometrik olarak bu, bir olasılık dağılımına ilişkin *"yığınsal dağılım işlevi"* (cummulative distribution function), ya da kısaca *"YDİ"* (CDF) ile gösterilebilir.
- Bu amaç için yeğlenen bir YDİ, ölçünlü normal dağılımdır.



7.2.2 Olabirim Modeli

- Doğrusal olasılık modelinin şöyle olduğunu anımsayalım:

$$P(Y = 1|X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$$

- Arzuladığımız özellikleri gösteren bir yaklaşım ise şöyledir:

$$P(Y = 1|X_i) = \Phi(\beta_1 + \beta_2 X_i)$$

- Burada Φ, ölçünlü normal dağılıma ait YDİ'dir:

$$\Phi(I_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{I_i} e^{-z^2/2} dz$$

- Yukarıda görülen modele *"olasılık birimi"* (probability unit) teriminin kısaltılmışı olan *"olabirim"* (probit) modeli denir.
- Olabirim modeli, açıklanmaya çalışılan olasılıksal ilişkinin özündeki doğrusal-dışılığı dikkate alırken, aynı zamanda tahmin edilen $\hat{Y}_i$'ların 0 ile 1 arasında kalmasını da sağlar.

Olabirim Modelinin Tahmin Edilmesi

- Şimdiye dek gördüğümüz modellerin büyük bir çoğunluğu değişkenlerde doğrusaldı.
- Açıklayıcı değişkenlerin $\ln X_i$, $\sqrt{X_i}$ ya da $1/X_i$ gibi değerler aldığı, "değişkenlerde doğrusal-dışı" modelleri de ele aldık.
- Olabirim modelinde ise, yukarıdakilerden farklı olarak, β_1 ve β_2 ölçünlü normal YDİ Φ'ın içinde yer almaktadır.
- Değiştirgelerde doğrusal-dışı olduğu için, böyle bir model SEK yöntemi ile tahmin edilemez.
- Olabirim modelinin tahmin edilmesi, tipik olarak, ençok olabilirlik yöntemi ile olur.
- Ençok olabilirlik yönteminin, β değerlerini bulurken eldeki verileri elde etme olasılığını ençokladığını anımsayalım.
- Diğer bir deyişle EO, gözlenen verilere yol açma olasılığı ençok olan değiştirge değerlerinin hesaplanmasıdır.

- Öte yandan, olabirim modelinin EO tahminine yönelik ençoklanmak istenen log olabilirlik işlevine ait basit bir matematiksel gösterim bulunmamaktadır.
- Bu nedenle, tahmin sürecinde bilgisayardan yararlanılarak temelde deneme yanılmaya dayalı yinelemesel bir sayısal hesaplama yöntemi kullanılır.
- Bu işlemler, aralarında Gretl'ın da bulunduğu çoğu modern ekonometri programı içinde hazır gelmektedir. Bu nedenle olabirim modelinin tahmin edilmesi uygulamada basittir.

Olabirim Modelinde Katsayıların Yorumlanması

- Olabirim modelinde katsayıların yorumlanmasının önceki modellerden farklı olduğuna dikkat edelim:

$$\Phi(\beta_1 + \beta_2 X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta_1+\beta_2 X_i} e^{-z^2/2} dz$$

- Yukarıda verilen gösterim bir olasılıktır ve eksi sonsuzdan $\beta_1+\beta_2 X_i$ değerine kadar ölçünlü normal YDİ altında kalan sol kuyruk alanını anlatmaktadır.
- Bu nedenle, belli bir $P(Y = 1|X_i)$'yi hesaplamak için önce $I = \beta_1 + \beta_2 X_i$ değerini alırız ve ölçünlü normal YDİ'den $P(Z \leq I)$ olasılığına bakarız.
- Bu noktada, Φ "s" şeklinde bir eğri olduğu için, X doğrusal olarak artarken olasılığın önce artarak artacağı ve daha sonra da azalarak artacağı unutulmamalıdır.
- Olabirim modelinde katsayıların nasıl yorumlanacağına bir örnek olarak $\beta_1 = -3$, $\beta_2 = 2$, ve $X = 1$ olsun.
- Buna göre $I = -3+2\times1 = -1$ olur. Ölçünlü normal eğri altında $P(Z \leq -1)$ sol kuyruk alanı ise 0,1587'dir. Demek ki burada Y olayının gerçekleşme olasılığı yüzde 15,87'dir.
- Benzer şekilde, $X = 2$ olduğunda $P(Z \leq 1) = 0{,}8413$ ve $X = 3$ olduğunda ise $P(Z \leq 3) = 0{,}9987$ olur.
- Görüldüğü gibi $X = 1$ iken X'teki bir birimlik artış olasılığı 0,6826 artırırken, $X = 2$ olduğunda ise bir birimlik benzer artış olasılığı yanlızca 0,1574 artırmaktadır.
- Öyleyse, olabirim modellerinde katsayılar yorumlanırken, seçilen başlangıç X düzeyi önemlidir.

- Bu doğrultuda uygulamada sıkça kullanılan bir değer X'in örneklem ortalaması olan $\bar{X}$'dir.
- Çoklu bağlanımdaki yorum için önce şu DOM'a bakalım:

$$P(Y|X_{2i},X_{3i}) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}$$

- Doğrusal modelde X_2'deki bir değişimin Y üstündeki etkisi, diğer bir deyişle X_2'nin Y'ye göre eğimi β_2'dir.
- Üç değişkenli olabirim modeli ise şöyledir:

$$\Phi(\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta_1+\beta_2 X_{2i}+\beta_3 X_{3i}} e^{-z^2/2} dz$$

- Model doğrusal olmadığı için eğimler de sabit değildir ve hem X_2'nin hem de X_3'ün aldığı değerlere bağlıdır.
- Dolayısıyla, X_2'deki bir birimlik değişimin etkisini bulmak için önce X_2 ve X_3 için birer başlangıç değeri seçilir ve olasılık hesaplanır. Bunun için $\bar{X}_2$ ve $\bar{X}_3$ kullanılabilir.
- Sonra, X_3 sabitken X_2 bir birim artırılır ve olasılık yeniden hesaplanır. Aradaki fark, seçili X_2 ve X_3 düzeyi için X_2'nin yaklaşık eğimini verir.

Olabirim Modelinde Çıkarsama

- Olabirim modelinde kullanılan EO tahmincileri, etkin (enaz varyanslı) olmanın yanı sıra büyük örneklemlerde tutarlı ve normal dağılımlıdır.
- Ancak EO genel olarak bir büyük örneklem yöntemi olduğu için, tahmin edilen ölçünlü hatalar da kavuşmazsaldır.
- Bu nedenle, katsayıların anlamlılığını sınamak için t değeri yerine ölçünlü normal z değeri kullanılır.
- Bu noktada eğer örneklem yeterince büyükse t dağılımının normal dağılıma yakınsadığı da unutulmamalıdır.
- Doğrusal modellerde bağlanımın bütününün anlamlılığını sınayan F sınamasına almaşık olarak, EO tahmininde de *"olabilirlik oranı"* (likelihood ratio) ya da kısaca *"OO"* (LR) sınaması kullanılmaktadır.
- LR sınamasının sıfır önsavı $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \ldots = 0$'dır. Test istatistiği ise k serbestlik derecesi ile χ^2 dağılımına uyar.

Olabirim Modelinde Yakışmanın İyiliği

- Kukla değişkenler söz konusu olduğunda, yakışmanın iyiliğini ölçmede R^2'nin yetersiz olduğunu anımsayalım.
- Olabirim gibi nitel bağımlı değişken modellerinde bu amaç için sıkça kullanılan iki ölçüt vardır.
- Bunlardan ilki *"doğru kestirilen durum sayısı"* (number of cases correctly predicted) değeridir.
- Bu ölçüte göre, $Y_i = 1$ iken tahmin edilen olasılık %50'den yüksekse ya da $Y_i = 0$ iken tahmin edilen olasılık %50'den düşükse, model doğru kestirim yapmıştır.
- İkinci ölçüt ise McFadden R^2 ya da *"sahte R^2"* (pseudo R^2) olarak adlandırılır ve log-olabilirlik istatistiğine dayanır.
- Log-olabilirlik, bağlanım kalıntılarının büyüklüğünü anlatan bir değerdir. McFadden R^2, eldeki modele ait log-olabilirliği yalnızca sabit terim içeren almaşık modelinkine oranlar.
- Ölçüt $[0,1]$ aralığındadır ama bildik R^2 ile karşılaştırılamaz.

Olabirim Açıklayıcı Örnek

- Olabirim tahminine ilişkin olarak, Türkiye'de firma sayısına göre illerde sanayi odası bulunup bulunmama olasılığını inceleyen örneğimize dönelim.
- Sonuçlar şöyledir:

$$\begin{array}{llll}
\hat{Y}_i = & -\ 1{,}8108 & +\ 0{,}0825\ X_i & \\
\text{öh} & (0{,}2802) & (0{,}0203) & \\
z & (-6{,}4620) & (4{,}0678) & \text{McFadden } R^2 = 0{,}3834
\end{array}$$

'Doğru kestirilen' durum sayısı = 71 (88,8%)

	Kestirilen 0	Kestirilen 1
Gözlenen 0	67	1
1	8	4

Olabilirlik oranı: Ki-kare(1) = 25,9288 (p-değeri = 0,0000)

- 1,96'dan büyük z değerleri, $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$'nın her ikisinin de anlamlı olduğunu göstermektedir.
- Katsayıları doğrudan yorumlamak güçtür. $\hat{\beta}_2$'nın artı işaretli olmasından, firma sayısındaki artışın sanayi odası olma olasılığını artırdığı yönünde kaba bir yorum yapabiliriz.
- Verilere göre illerdeki ortalama firma sayısı 849'dur.
- Buna göre ortalama ilde sanayi odası olma olasılığı şudur:

$$\Phi(-1{,}8108 + 0{,}0825 \times 8{,}49) = \Phi(-1{,}1104) = 0{,}1335$$

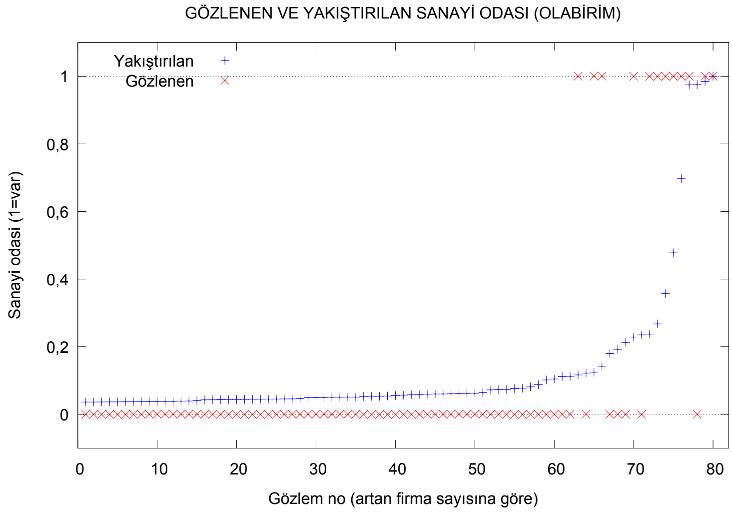
- Yukarıdaki $\Phi(I) = P(Z \leq I)$ değeri ölçünlü normal dağılım çizelgesinden hesaplanabilir.
- Veri biriminin 100 firma olduğunu anımsayalım. $X = 9{,}49$ olduğunda olasılık da $0{,}1520$ olur. Demek ki ortalama ilde kurulacak 100 yeni şirket olasılığı $0{,}0185$ kadar artıracaktır.
- Bu değer 849 ile 949 arasındaki ortalama eğimdir. Gretl, $\bar{X} = 849$ noktasındaki eğimi 0,0178 olarak kullanıcıya verir.

(... devam)

- Farklı X_i değerleri için $P(Y = 1|X_i)$ olasılığı benzer şekilde bulunabilir.
- Örnek olarak, $X = 45{,}00$ ise tahmin edilen olasılık şudur:

$$\Phi(-1{,}8108 + 0{,}0825 \times 45{,}00) = \Phi(1{,}9039) = 0{,}9431$$

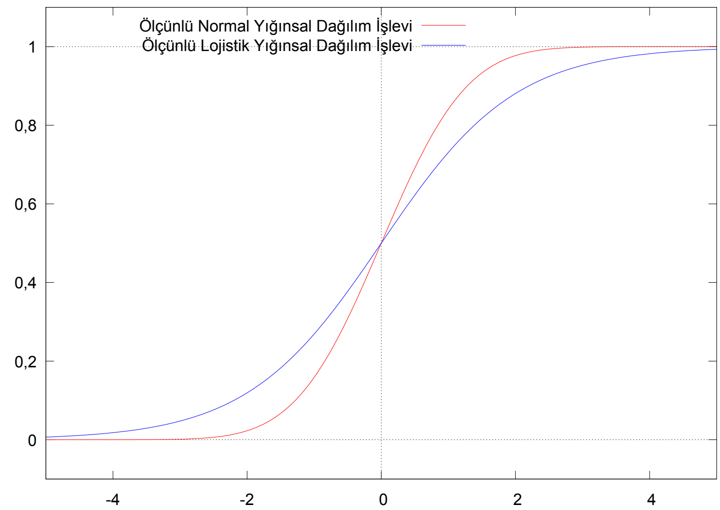
- Demek ki yaklaşık 4500 sanayi firması bulunan İzmir ya da Bursa gibi bir ilde sanayi odası bulunma olasılığı %94'tür.
- Yakışmanın iyiliğine ilişkin olarak, sahte R^2 bize modelin açıklama gücünün yaklaşık %38 olduğunu anlatmaktadır.
- Diğer yandan, modelin 81 ilden 78'indeki durumu doğru olarak kestirebildiği de görülmektedir.


GÖZLENEN VE YAKIŞTIRILAN SANAYİ ODASI (OLABİRİM)
Yakıştırılan
Gözlenen
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Sanayi odasi (1=var)
0
10
20
30
40
50
60
70
80
Gözlem no (artan firma sayısına göre)

7.3 Diğer Nitel Tepki Modelleri

7.3.1 Logbirim Modeli

- Olabirim modeline almaşık olarak sıklıkla kullanılan bir model *"logbirim"* (logit) modelidir.
- Logbirim sözcüğü, *"logaritmik birim"* (logarithmic unit) teriminin kısaltılmasından gelmektedir.
- Logbirim bağlanımının olabirimden en büyük farkı ölçünlü normal YDİ yerine ölçünlü lojistik YDİ'yi kullanmasıdır.
- Şekilsel olarak ölçünlü normal YDİ ile ölçünlü lojistik YDİ birbirlerine benzer. Aralarındaki en büyük fark ise lojistik eğrinin normal eğriye göre daha kalın kuyruklu olmasıdır.
- Diğer bir deyişle, logbirim modelinde P_i koşullu olasılığı 0 ya da 1 değerine biraz daha yavaş bir hızla yaklaşır.



- İki değişkenli logbirim modeli şu şekilde gösterilir:

$$P(Y = 1|X_i) = F(\beta_1 + \beta_2 X_i)$$

- Burada F, ölçünlü lojistik dağılıma ait YDİ'dir:

$$F(X_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_1 + \beta_2 X_i)}}$$

- Görüldüğü gibi, lojistik YDİ matematiksel olarak normal YDİ'ye göre daha yalındır.
- Uygulamada olabirim modeli gibi logbirim modeli de ençok olabilirlik yaklaşımı ile ve sayısal yöntemler kullanılarak tahmin edilir.
- Logbirim modelinde katsayıların yorumlanması, olabirimle aynıdır. Farklı X değerleri için olasılıklar hesaplanır ve X'ler değişince olasılıkların ne kadar değiştiğine bakılır.
- İstatistiksel çıkarsama ve yakışmanın iyiliği konuları da yine olabirim modeli ile benzer şekildedir.
- Gerçek şu ki iki model çoğu zaman birbirine oldukça yakın sonuçlar üretir.
- Eskiden, logbirim bağlanımını yeğlemenin bir nedeni daha hızlı hesaplanabilmesiydi. Hızlı bilgisayarlar bu üstünlüğü ortadan kaldırmıştır.
- Bugün iki model arasındaki seçim çoğunlukla hangisinin yazılım tarafından daha iyi desteklendiği ile ilgilidir.
- Gretl her iki modeli de eşit düzeyde destekler.

Logbirim Açıklayıcı Örnek

- Firma sayılarına göre sanayi odası bulunup bulunmama olasılığını bir de logbirim modeli ile tahmin edelim.
- Sonuçlar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{llll}
\hat{Y}_i = - & 3{,}3083 & +\,0{,}1857\,X_i & \\
\text{öh} & (0{,}6350) & (0{,}0622) & \\
z & (-5{,}2099) & (2{,}9867) & \text{McFadden } R^2 = 0{,}3861
\end{array}$$

'Doğru kestirilen' durum sayısı = 72 (90,0%)

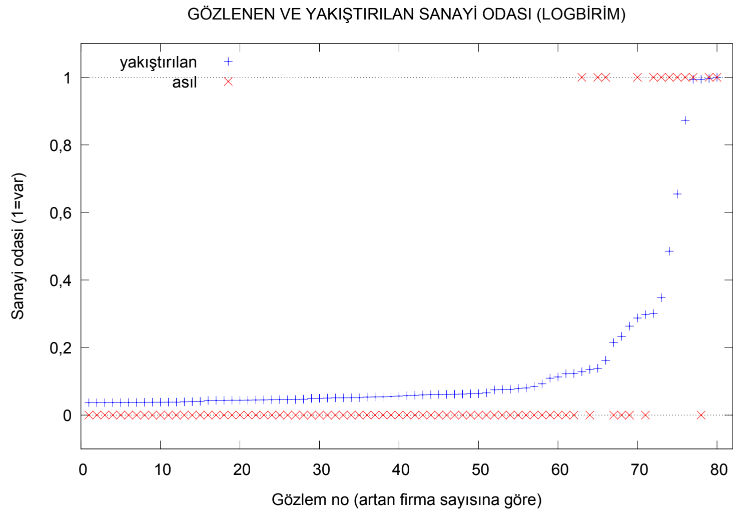
		Kestirilen 0	Kestirilen 1
Gözlenen	0	67	1
	1	7	5

Olabilirlik oranı: Ki-kare(1) = 26,1155 (p-değeri = 0,0000)

- $\hat{\beta}_2$'nın anlamlı ve artı işaretli olmasına bakarak, kabaca, firma sayısının ilde sanayi odası bulunma olasılığı üzerinde olumlu etkisi olduğu yorumunu yapabiliriz.
- Tahmin edilen katsayılar farklı olsa da logbirim modeli olabirim modeline benzer sonuçlar göstermektedir.
- Örnek olarak, 849 firma bulunan ortalama ildeki sanayi odası bulunma olasılığı şudur:

$$\frac{1}{1 + e^{-(-3{,}3083 + 0{,}1857 \times 8{,}49)}} = 0{,}1504$$

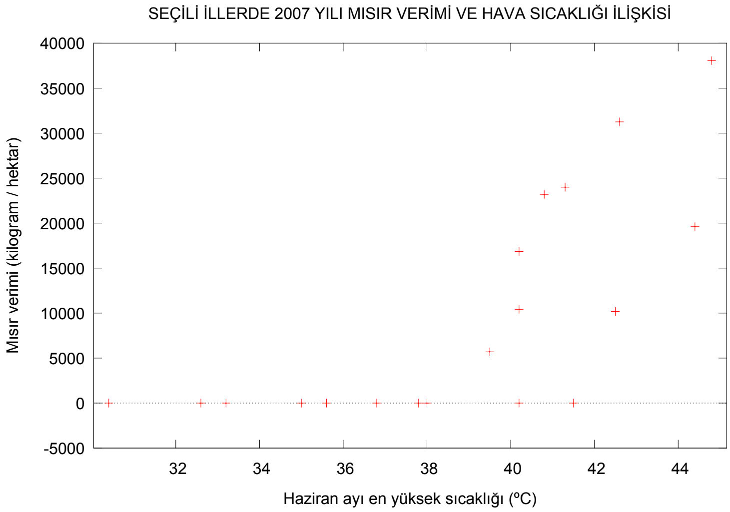
- Demek ki olabirim modeli tarafından %13,4 tahmin edilen olasılığı log birim modeli de %15,0 olarak bulmuştur.
- Sahte R^2, doğru kestirilen durum sayısı, ve olabilirlik oranı istatiği de önceki olabirim tahminleri ile neredeyse aynıdır.



7.3.2 Tobirim Modeli

- Olabirim ve logbirim modellerin bir uzantısı da 1958 yılında Nobel ödüllü ekonomist James Tobin tarafından geliştirilen ve bu nedenle *"tobirim"* (tobit) olarak adlandırılan modeldir.
- Bu modeli açıklayabilmek için, illerdeki ortalama sıcaklık ve mısır bitkisi üretiminin verimliliği ilişkisini ele alalım.
- Bir sıcak iklim bitkisi olan mısır tarımı Türkiye'nin her ilinde yapılmadığı için, burada iki gözlem kümesi söz konusudur.

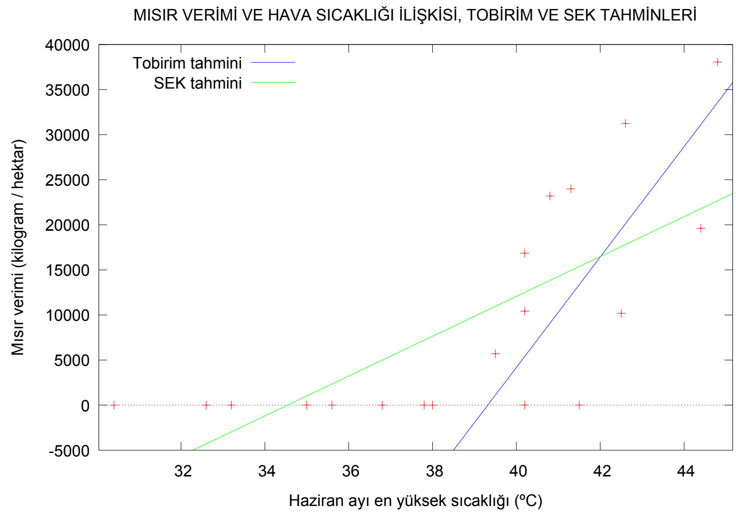
- Birinci kümede hem sıcaklık hem de verimlilik bilgisinin bulunduğu iller yer almaktadır.
- İkinci kümeyi ise iklim ya da diğer nedenler yüzünden mısır tarımı yapılmayan ve bu nedenle yalnızca sıcaklık bilgisinin olduğu iller oluşturmaktadır.
- Bağımlı değişkene ait bilginin yalnızca bazı gözlemler için bulunabildiği böyle bir veri setine *"sansürlü"* (censored) örneklem adı verilir.



- Ekonometrik olarak, tobirim modeli şöyle gösterilebilir:

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i && Y_i > 0 \text{ ise,} \\ Y_i &= 0 && \text{eğer değilse.} \end{aligned}$$

- İkinci satırda Y_i aslında artı ve eksi değerler alabilecekken, mısır tarımı yapılmadığı için sıfır olarak gözlenmektedir.
- Öyleyse gerçekte tam göremediğimiz bir *"örtük değişken"* (latent variable) Y_i^* vardır. Bizim elimizdeki Y_i ise bir *"sınırlı bağımlı değişken"* (limited dependent variable) olmaktadır.
- Bu nedenle, yalnızca birinci satır kullanılır ve tek bir SEK bağlanımı ile tahmin edilirse, sonuçlar yanlı ve tutarsız olur.
- $Y_i = 0$ gözlemlerini dışlayan bir bağlanım ile tüm verileri kullanan bir bağlanımın sonuçlarının farklı çıkacağı açıktır.
- Böyle bir durumda yansız ve tutarlı tahminciler üreten tobirim modeli, uygulamada ençok olabilirlik yöntemi ile kolaylıkla tahmin edilebilmektedir.



7.3.3 İleri Model ve Konular

Sıralı Logbirim ve Olabirim

- Olabirim ve logbirim modellerine ilişkin örneklerimizdeki Y değişkenleri yalnızca iki değer alabilen kuklalar idi.
- Ancak kimi zaman bağımlı değişken için ikiden fazla değer söz konusu olabilir. Üstelik bunlar genellikle sayısal değil, *"sırasal"* (ordinal) niteliktedir.
- Örnek olarak, anketlerde "tümüyle katılıyorum," "kısmen katılıyorum," "katılmıyorum" gibi yanıtlar yaygındır.
- Benzer şekilde kişilerin öğrenim düzeyi "ilköğretim," "lise," "üniversite," "yüksek lisans" değerlerini alabilir.
- Uygulamada bunlar veri setine $0, 1, 2, \ldots$ biçiminde işlenir. Ancak gerçekte bir seçeneğin diğerinin bir fazlası ya da iki katı olduğu söylenemez.
- Y bağımlı değişkeninin ikiden fazla seçenek alabildiği ve bunların belli bir sırayı izlediği durumları incelemek için *"sıralı"* (ordered) olabirim ve logbirim yöntemleri kullanılır.
- Başta gördüğümüz iki değersel modellerin genellemesi olan bu modellerde her bir sonucun gerçekleşme olasılığı yine normal ve lojistik YDİ'ler kullanılarak bulunur.
- Bu yöntemlerin hesaplanması ve yorumlanması biraz daha karmaşık olduğu için burada ele alınmayacaktır.

Çokterimli Logbirim ve Olabirim

- İkiden fazla kesikli değer alan ancak bu değerlerin doğal bir sıra izlemediği değişkenlere *"kesikli seçim"* (discrete choice) değişkeni adı verilir.
- Örnek olarak ulaşım aracı için "otomobil," "otobüs," "tren" gibi seçenekler belirlenebilir.
- Aynı şekilde kişilerin işi "serbest," "ücretli," "memur" gibi farklı ulamlara ayrılabilir.
- Y bağımlı değişkeninin aldığı değerler eğer mantıksal bir sıra izlemiyor ise, bu durumda *"çokterimli"* (multinomial) olabirim ve logbirim yöntemleri kullanılır.
- Tekil seçenek olasılıklarının olabirim ya da logbirim olarak belirtildiği bu modeller de yine ileri konular arasındadır.

Süre Modelleri

"Süre modeli" (duration model) adı verilen bir model sınıfı vardır. Sistem aksaklıklarını inceleyen ve *"Sağkalım çözümlemesi"* (survival analysis) de denilen çalışmalarda sıkça yararlanılan bu modellerin konusu şunlar olabilir:

- İşsiz kalma süresini belirleyen etmenler
- Bir grevin ne kadar uzayabileceği
- Hastaların iyileşme süreleri
- Bir makinenin ömrünün ne olacağı

Tüm bu örneklerde temel konu zamandır ve bir rastsal değişken olarak modellenir. Tahmin süreci ise yine uygun bir olasılık dağılım işlevi ya da bunun YDİ'sinin kullanılmasına dayalıdır. Gretl gibi ekonometri yazılımları tarafından sunulan tahmin seçenekleri arasında çeşitli süre modelleri de bulunmaktadır.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 15* “Qualitative Response Regression Models” okunacak.

Önümüzdeki Ders
Eşanlı Denklem Modelleri

Bölüm 8

Eşanlı Denklem Modelleri

8.1 Eşanlı Denklem Modellerinin Niteliği

8.1.1 Eşanlı Denklem Modelleri

- Şimdiye kadar içinde yalnızca bir Y bağımlı değişkeni olan tek denklemli modelleri ele aldık.
- Bir ya da birden fazla X açıklayıcı değişkeni içerebilen bu modellerde, nedenselliğin yönü de tanımlı ve X'ten Y'ye doğru idi.
- Ancak, gerçek hayatta çoğu zaman basit ve tek yönlü bir neden sonuç ilişkisinden söz etmek doğru değildir.
- Değişkenler arasındaki ilişkinin iki yönlü olduğu bu gibi durumlarda açıklayıcı ve bağımlı değişken ayrımı güçleşir.
- İşte böyle durumlarda birden fazla Y bağımlı değişkeninin farklı denklemler aracılığıyla tanımlandığı *"eşanlı denklem"* (simultaneous equation) modellerinden yararlanılır.
- Eşanlı denklem modellerinde birden fazla karşılıklı ya da ortak bağımlı değişken vardır ve bunlar arasındaki ilişkiler birden fazla denklem kullanılarak anlatılır.
- Önceki modellerin aksine, eşanlı denklem modellerindeki bir denkleme ait katsayıları doğru tahmin etmek için diğer denklemlerin verdiği bilgiyi de dikkate almak gereklidir.
- Bu bölümde, eşanlı denklem modellerine örnekler verecek ve bu modellerin neden SEK yöntemi ile genellikle tahmin edilemeyeceğini göstereceğiz.

- Tek denklemli modellerdeki eşanlılık sorununu çözmeye yönelik araç değişkenler yaklaşımını inceleyecek ve buna ilişkin sınama ve tahmin yöntemlerini de ele alacağız.

Gelir-Para Arzı Modeli Örneği

- Eşanlı denklemlere örnek olarak şu modeli gösterebiliriz:

$$\begin{array}{ll} \text{Gelir işlevi:} & Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 M_t + \alpha_3 W_t + \alpha_4 \Pi_t + u_t \\ \text{Para arzı işlevi:} & M_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 E_t + v_t \end{array}$$

- Burada
  Y_t milli geliri,
  M_t para stoğunu,
  W_t ücret ödemelerini,
  Π_t firma karlarını
  E_t ise döviz kurunu
  göstermektedir.

- Miktar kuramı ile toplam üretime gelir yaklaşımının karışımı olan modele göre, para arzı milli geliri belirleyicidir.

- Diğer yandan para arzı da merkez bankası tarafından gelir düzeyine bağlı olarak belirlendiği için, Y ve M arasında iki yönlü bir ilişki bulunmaktadır.

Klein Model I Örneği

- Daha kapsamlı bir örnek olarak, Lawrence Klein tarafından 1950 yılında geliştirilen Klein Model 1 sistemini ele alalım.

$$\begin{array}{lllllll} \text{Tüketim işlevi:} & C_t = & \alpha_1 & + \alpha_2 \Pi_t + \alpha_3 \Pi_{t-1} + & \alpha_4 (W_t + S_t) & + u_t \\ \text{Vergi işlevi:} & I_t = & \beta_1 & + \beta_2 \Pi_t + \beta_3 \Pi_{t-1} + & \beta_4 K_{t-1} & + v_t \\ \text{Ücret işlevi:} & W_t = & \lambda_1 & + \lambda_2 Y_t + \lambda_3 Y_{t-1} + & \lambda_4 t & + \epsilon_t \\ \text{Gelir tanımı:} & Y_t = & C_t & + \ I_t \ + \ G_t & & \\ \text{Kazanç tanımı:} & \Pi_t = & Y_t & - \ W_t \ - \ T_t & & \\ \text{Sermaye tanımı:} & K_t = & K_{t-1} & + \ I_t & & \end{array}$$

- Bir makroekonominin nasıl işlediğini anlatan modeldeki ilişkilerin çok yönlülüğü dikkat çekicidir.

- En üstteki üç denkleme *"davranışsal denklem"* (behavioral equation) adı verilir. Bunlar, firma ve tüketiciler gibi iktisadi oyuncuların davranışlarının sonucunu gösterir.

- Daha alttaki üç denklem ise hesaplamasal ilişkileri anlatan tanımlardır.

- Altı eşanlı denklemden oluşan Klein Model I sisteminde toplam 10 değişken bulunmaktadır. Bunlar

C_t	tüketim harcamaları,
I_t	yatırım harcamaları,
W_t	özel sektör ücret ödemeleri,
Y_t	toplam üretim,
Π_t	firma karları,
K_t	sermaye stoğu,
G_t	kamu mal ve hizmet harcamaları,
S_t	kamu ücret ödemeleri,
T_t	dolaylı vergiler ve
t	zaman

  şeklindedir.

- Günümüzde artık çağdışı kalan bu doğrusal model, ABD makroekonomisinin ilk modeli olması açısından önemlidir.

Eşanlı Denklem Modelinin Genel Gösterimi

- Eşanlı denklem modelinin genel gösterimi şöyledir:

$$
\begin{array}{lllllll}
Y_{1i} = & \alpha_{11} & + \alpha_{12}Y_{2i} + \cdots + & \alpha_{1r}Y_{ri} & + \beta_{11}X_{1i} + \cdots + & \beta_{1k}X_{ki} & +u_{1i} \\
Y_{2i} = & \alpha_{21}Y_{1i} + & \alpha_{22} \quad + \cdots + & \alpha_{2r}Y_{ri} & + \beta_{21}X_{1i} + \cdots + & \beta_{2k}X_{ki} & +u_{2i} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Y_{ri} = & \alpha_{r1}Y_{1i} + & \alpha_{r2}Y_{2i} + \cdots + & \alpha_{rr} & + \beta_{r1}X_{1i} + \cdots + & \beta_{rk}X_{ki} & +u_{ri}
\end{array}
$$

- Burada
  $Y_1, \ldots, Y_r$ ortak bağımlı değişkenleri,
  $X_1, \ldots, X_k$ bağımsız açıklayıcı değişkenleri,
  $u_1, \ldots, u_r$ olasılıksal hata terimlerini
  göstermektedir.

- Y ve X'lerin katsayıları sırasıyla α ve β ile gösterilmiştir.

- Eşanlı denklem modellerindeki X değişkenleri olasılıksal değildir. Bu değişkenler modelin dışından geldikleri için bunlara *"dıştürel"* (exogenous) değişken denir.

- Değerleri önceden belirlenmiş olmadığı için, ortak bağımlı değişken Y'ler olasılıksaldır. Model içinde tanımlanan bu değişkenlere *"içtürel"* (endogenous) değişken adı verilir.

- Model geleceği tahmin için kullanıldığında yalnızca içtürel değişkenler için değer üretir. Dıştürel değişkenler ise verili olmalıdır.
- Bir değişkenin içtürel mi yoksa dıştürel mi olacağına karar vermek modeli belirten kişiye kalmıştır.
- Bu noktada dikkatli davranılmalı, yapılan ayrım önsel ya da iktisat kuramı temelinde savunulabilmelidir.

8.1.2 Özdeşleme Sorunu

Eşanlı denklem modellerindeki değişkenlerin birden fazla denklemde yer aldıkları yetmezmiş gibi, başlarındaki katsayılar farklı denklemlerde farklıdır. Böyle karmaşık bir yapı altında tahmin edilen denklemin hangi denklem, katsayının ise hangi katsayı olduğunu bilmek güçtür. Bir denkleme ait katsayıların hesaplanıp hesaplanamayacağına ilişkin olarak üç olasılık söz konusudur:

1. *"Eksik özdeşleme"* (under identification): Bazı katsayıların değeri hesaplanamamaktadır.
2. *"Tam özdeşleme"* (exact identification): Her bir katsayı için tekil bir değer hesaplanabilmektedir.
3. *"Aşırı özdeşleme"* (over identification): Katsayıların biri ya da daha fazlası için birden çok değer söz konusudur.

Özdeşleme Kuralları

- Karmaşık bir modelde katsayıları bulabilmek için yeterli bilgi olup olmadığını anlamak zor bir sürece dönüşebilir.
- Bu işlemi kolaylaştıran çeşitli özdeşleme kuralları vardır. Uygulamada, özdeşleme değerlendirilirken genellikle *"sıra koşulu"* (order condition) kuralına başvurulmaktadır.
- **Sıra koşulu**

  Toplam r denklemli modeldeki bir denklemin özdeşlenebilmesi için, denklemin bu modeldeki en az $r - 1$ değişkeni dışlaması gereklidir. Denklem eğer tam olarak $r - 1$ değişkeni dışlıyorsa tam özdeşlemeli, $r - 1$'den fazla değişkeni dışlıyorsa da aşırı özdeşlemelidir.
- Örnek olarak, baştaki gelir-para arzı modelinde iki denklem olduğu için her denklem bir değişken dışlamalıdır. Demek ki gelir işlevi tam, para arzı işlevi ise aşırı özdeşlemelidir.

8.1.3 Eşanlı Denklem Yanlılığı

- Eşanlı denklem modellerinin temel özelliği, bir denklemde bağımlı olan değişkenin diğer bir denklemde açıklayıcı değişken olabilmesidir.
- Böyle içtürel açıklayıcı değişkenlerin en büyük sakıncası ise bağlanım hata terimi ile genellikle ilişkili çıkmalarıdır.
- X'lerin olasılıksal olmadığı varsayımının çiğnenmesi anlamına gelen bu durumda SEK tahmincileri tutarsızdır.
- Diğer bir deyişle, SEK tahmincileri yanlıdır ve bu yanlılık örneklem büyüklüğü artsa bile ortadan kalkmaz.
- Eşanlı denklem yanlılığını cebirsel olarak göstermek için aşağıdaki basit Keynesçi gelir modelini ele alalım.

$$\begin{array}{ll} \text{Tüketim işlevi:} & C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t \\ \text{Gelir tanımı:} & Y_t = C_t + S_t \end{array}$$

- Burada
  C_t tüketim harcamasını,
  Y_t geliri,
  S_t de tasarrufu göstermektedir.
- $\beta_1 > 0$ ve $0 < \beta_2 < 1$ ise otonom tüketimi ve marjinal tüketim eğilimini anlatan anakütle değiştirgeleridir.
- C_t ve Y_t'nin karşılıklı bağımlı oldukları görülmektedir.

Hata Teriminin Y ile İlintili Olması

- İlk olarak elimizdeki modelde Y_t'nin hata terimi ile ilintili olduğunu gösterelim.
- Tüketim işlevini gelir özdeşliğinde yerine koyarsak şunu buluruz:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t + I_t \\ Y_t &= \frac{\beta_1}{1-\beta_2} + \frac{1}{1-\beta_2} I_t + \frac{1}{1-\beta_2} u_t \end{aligned}$$

- $E(u_t) = 0$ varsayımından ve I_t'nin önceden belirli olduğu için beklenen değerinin kendisine eşit olma özelliğinden yararlanarak şunu elde ederiz:

$$E(Y_t) = \frac{\beta_1}{1-\beta_2} + \frac{1}{1-\beta_2} I_t$$

(. . . devam)

- Yukarıdaki üçüncü denklemi ikinciden çıkartalım.

$$Y_t - E(Y_t) = \frac{u_t}{1-\beta_2}$$

- $E(u_t) = 0$ olduğuna göre $u_t - E(u_t) = u_t$ diyebiliriz.
- Buna göre Y_t ve u_t arasındaki kovaryans şöyledir:

$$\begin{aligned}\text{cov}(Y_t, u_t) &= E\left([Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]\right) \\ &= \frac{E(u_t^2)}{1-\beta_2} \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\beta_2}\end{aligned}$$

- $0 < \beta_2 < 1$ ve $\sigma^2 > 0$ olduğu için $\text{cov}(Y_t, u_t)$ sıfırdan farklı olmalıdır. Bu durumda hata teriminin bağımlı değişken ile ilintisiz olduğu yönündeki SEK varsayımı çiğnenmiş olur.

Değiştirge Tahminlerinin Yanlı Olması

- İkinci olarak Y_t ve u_t arasındaki ilinti nedeniyle değiştirge tahminlerinin yanlı olduğunu göstermek istiyoruz.
- Bunun için $\hat{\beta}_2$ formülünü anımsayalım:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \frac{\sum c_t y_t}{\sum y_t^2} \\ &= \frac{\sum C_t y_t}{\sum y_t^2}\end{aligned}$$

- Alışık olduğumuz gibi, küçük harfler burada ortalamadan sapmaları göstermektedir.
- Formül ikili bağlanım konusunda gördüğümüz ile aynıdır. Tahmin edilen şey tüketim işlevi olduğu için C_t'nin bağımlı, Y_t'nin ise açıklayıcı değişken olduğuna dikkat ediniz.

(. . . devam)

- Şimdi, $\hat{\beta}_2$ formülündeki C_t yerine bunun tüketim işlevindeki eşitini koyalım:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \frac{\sum(\beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t)y_t}{\sum y_t^2} \\ &= \beta_2 + \frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\end{aligned}$$

- *Dikkat:* Yukarıdaki ikinci adımda $\sum Y_t y_t / \sum y_t^2 = 1$ ve $\sum y_t = 0$ özelliklerinden yararlanılmıştır.

- Her iki yanının beklenen değerini alırsak şunu buluruz:

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2 + E\left[\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right]$$

- Beklenen değer işlemcisi doğrusal olduğu için en sağdaki terimi değerlendiremiyoruz. Ancak açıkça görülüyor ki $\sum y_t u_t$ terimi sıfır olmadıkça $\hat{\beta}_2$ yanlı bir tahmin edicidir.

Değiştirge Tahminlerinin Tutarsız Olması

- Eşanlılık altında tahminlerin tutarsız olduğunu göstermek için, bulmuş olduğumuz $E(\beta_2)$ formülünden yola çıkıyoruz:

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2 + E\left[\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right]$$

- Yukarıda görülen $\sum y_t u_t$ bir örneklem kavramıdır. Bu terim bir anakütle kavramı olan cov(Y_t, u_t) ile yakından ilişkilidir ancak ona eşit değildir.

- Bu nedenle Y_t ile u_t'nin ilintili olduğunu, diğer bir deyişle cov$(Y_t, u_t) \neq 0$ eşitsizliğini göstermiş olsak da $\sum y_t u_t \neq 0$ diyemiyoruz.

- Bir tahmincinin beklenen değeri kesin olarak bilinemediği zaman dikkatler bunun kavuşmazsal değerine yöneltilir.

- Bunun için ise *"olasılık sınırı"* (probability limit), kısaca *"plim"* kavramından yararlanılır.

(...devam)

- $E(\hat{\beta}_2)$ formülünün her iki yanının olasılık sınırını alalım.

$$\text{plim}(\hat{\beta}_2) = \text{plim}(\beta_2) + \text{plim}\left(\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right)$$

- Örneklem büyüklüğü sonsuza giderken $\sum y_t^2/n = \text{var}(y_t)$ olur. Benzer şekilde $\sum y_t u_t/n = \text{cov}(y_t, u_t)$ olur.
- $\text{var}(y_t) = \sigma_Y^2$ ve daha önce bulduğumuz $\text{cov}(y_t, u_t) = \frac{\sigma^2}{1-\beta_2}$ eşitliklerini kullanarak şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\text{plim}(\hat{\beta}_2) &= \text{plim}(\beta_2) + \frac{\text{plim}(\sum y_t u_t/n)}{\text{plim}(\sum y_t^2/n)} \\ &= \beta_2 + \frac{\sigma^2/(1-\beta_2)}{\sigma_Y^2}\end{aligned}$$

- $0 < \beta_2 < 1$ ve $\sigma^2, \sigma_Y^2 > 0$ olduğuna göre, $\hat{\beta}_2$ gerçek β_2'yi olduğundan büyük tahmin etmektedir. Demek ki $\hat{\beta}_2$ yanlıdır ve örneklem büyüse de yanlılık ortadan kalkmamaktadır.

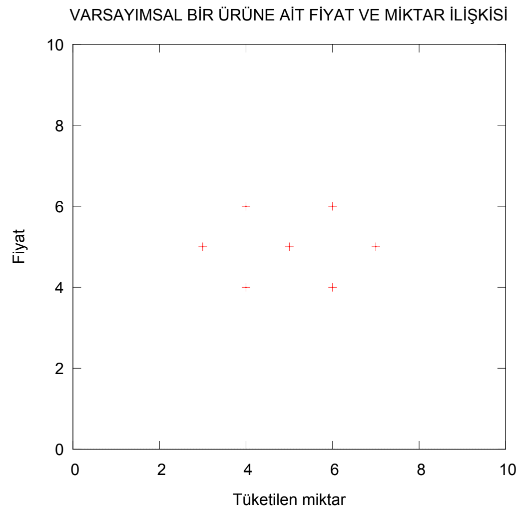
8.2 Tek Denklemli Modellerde Eşanlılık

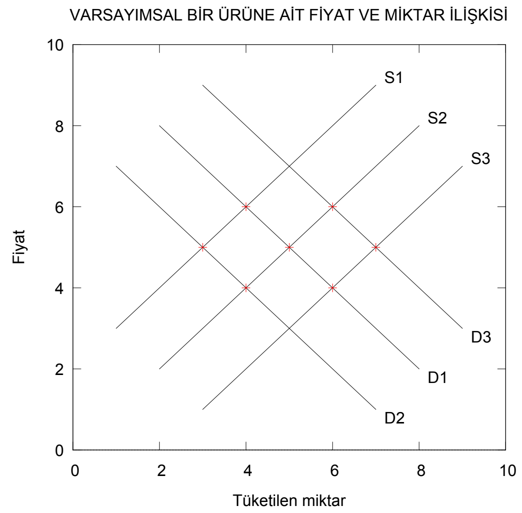
- Eşanlı denklem modellerinin temel özelliğinin birden fazla nedensel bağlantıyı anlatan birden fazla denklemden oluşmaları olduğunu biliyoruz.
- Uygulamada ise sistemi bütün olarak ele almak yerine yalnızca bir denkleme odaklanan tek denklem yöntemleri sıkça kullanılır.
- Denklem sisteminin sakıncası, bir denklemde yanlış işlev biçimi kullanıldığında bunun diğer denklemlere taşınarak ciddi model belirtim hatalarına yol açabilmesidir.
- Tek denklem yaklaşımı bu zorluktan kaçınmakla kalmaz, aynı zamanda uygulama kolaylığı da sağlar.
- Tek denklem yaklaşımında diğer denklemler için açıkça belirtim yapılmaz ama bunları göz ardı etmenin eşanlılık yanlılığına yol açacağı da unutulmaz.
- Örnek olarak, bir ürüne olan talebi tahmin etmek istiyor olalım. Bunun için aşağıdaki gibi bir model belirtebiliriz.

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_t$$

- Burada
  P_t malın fiyatını,
  Q_t ise tüketilen miktarı
  göstermektedir.
- Talep ile fiyat arasındaki ilişki ters yönlü olduğu için β_2'nin eksi değerli olmasını bekleriz.
- Elimizdeki modelde Q_t ile P_t'nin ortak bağımlı değişkenler olduğunu görmek güç değildir.
- İktisat kuramından, fiyat ve miktarın arz ve talep eğrileri tarafından ortaklaşa belirlendiğini biliyoruz.
- Dolayısıyla, fiyattaki bir değişim ürün miktarını etkilerken üretim maliyetlerinin artması gibi bir nedenden dolayı miktardaki bir değişiklik de fiyatı etkileyecektir.
- Demek ki elimizdeki model, daha önce gördüğümüz tek denklemli modellerden farklı olarak çözülmesi gereken bir eşanlılık sorunu içermektedir.

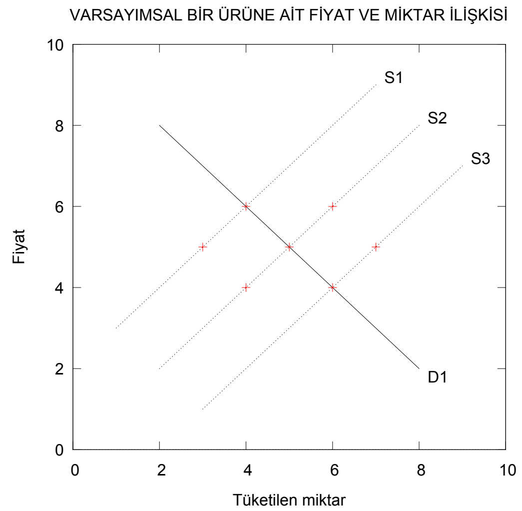
- Sorunun niteliğini net bir şekilde görmek için varsayımsal fiyat-miktar verilerini serpilim çizimi üzerinde gösterebiliriz.





- Çizitlerden anlaşıldığı gibi, elimizdeki fiyat-miktar verileri gerçekte farklı arz ve talep eğrilerinin kesişmesi sonucu ortaya çıkan denge noktalarından başka birşey değildir.
- Dolayısıyla, bu verilere bir doğru yakıştırarak ne talep ne de arz işlevini tahmin etmiş oluruz.
- Başta da göstermiş olduğumuz gibi SEK yöntemi burada yanlı ve tutarsız katsayı tahminleri üretecektir.

- Sorununun farklı bir yaklaşım gerektirdiği açıktır. Bize gereken şey talep sabitken arzın değişmesi sonucu ortaya çıkan fiyat-miktar çiftleridir.
- Sabit bir talep eğrisi üzerindeki noktalardan yararlanarak talep eğrisinin eğimini doğru bir şekilde tahmin edebiliriz.



8.2.1 Araç Değişkenler Yaklaşımı

P_t ve Q_t arasındaki eşanlılık sorununu çözebilmek için *"araç değişkenler modeli"* (instrumental variables model, kısaca IV model) adı verilen yaklaşımı izleriz. IV modelinde bilindik bağımlı ve açıklayıcı değişkenlerin yanı sıra yeni bir değişken türü olarak Z_t araç değişkenleri bulunur. Z_t, geçerli bir araç olmak için iki koşulu sağlamalıdır:

1. *"İlgililik"* (relevance): corr$(Z_t, P_t) \neq 0$.
2. *"Dıştürellik"* (exogeneity): corr$(Z_t, u_t) = 0$.

Kısaca, bu değişken fiyattaki arz eğrisinden kaynaklı değişimi yakalayabilmeli ancak talep tarafından etkilenmeyerek hata terimi ile ilintisiz de kalabilmelidir. Elimizdeki talep işlevi modeli örneğinde üretim maliyetlerini ya da tarımsal bir ürün için hava koşullarını uygun bir araç olarak düşünebiliriz.

- Araç değişkenler modelinin genel gösterimi şöyledir:

Araç değişkenler modeli

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Y'_{1i} + \cdots + \beta_r Y'_{ri} + \beta_{r+1} X_{1i} + \cdots + \beta_{r+k} X_{ki} + u_i$$

- Burada
  Y_i bağımlı değişkeni,
  $Y'_{1i}, \ldots, Y'_{ri}$ içtürel açıklayıcı değişkenleri
  $X_{1i}, \ldots, X_{ki}$ dıştürel açıklayıcı değişkenleri,
  göstermektedir.

- Dıştürel değişkenler u_i ile ilintisizdir. İçtürel değişkenler ise u_i ile ilintilidir ve eşanlılık yanlılığına yol açmaktadır.

- Ayrıca $Z_{1i}, \ldots, Z_{si}$ biçiminde s sayıda araç değişken vardır. Z_i'ler Y_i''leri açıklayıcıdır ama hata terimi ile de ilintisizdir.

- Araç değişken sayısı içtürel değişken sayısından azsa, model eksik özdeşlemeli demektir. Araç sayısı eşitse tam özdeşlemeli, fazlaysa da aşırı özdeşlemeli model olur.

Tek Denklem ile Eşanlı Denklemler İlişkisi

- Elimizdeki talep işlevi modelinin ve bu modeli doğru tahmin edebilmek için önerdiğimiz araç değişkenler yaklaşımının temelinde eşanlı denklemler olduğuna dikkat edelim.

- P_t ve Q_t arasında iki yönlü bir bağlantı olduğunu biliyoruz. Bu durum aslında iki denklemli bir modeli göstermektedir.

- Tek denklem yaklaşımını benimsemek yerine ilişkiyi bütün olarak ele alsaydık, aşağıdakine benzer bir eşanlı denklem modelimiz olacaktı:

$$\begin{array}{ll} \text{Talep işlevi:} & Q_t^d = \beta_1 + \beta_2 P_t + u_{2t} \\ \text{Arz işlevi:} & Q_t^s = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 Z_t + u_{1t} \end{array}$$

- Öyleyse Z_t gerçekte açıkça belirtmediğimiz arz işlevindeki bağımsız bir açıklayıcı değişkenden başka birşey değildir.

- Eşanlı denklemlerde bir denklemi diğerlerinden ayırt ederek tahmin edebilmek için özdeşleme kurallarından yararlandığımızdan söz etmiştik.

- Sıra koşuluna göre bu iki denklemli örnekte talep işlevi bir değişkeni dışladığı için tam özdeşlemeli, arz işlevi ise en az bir değişkeni dışlayamadığı için eksik özdeşlemelidir.

- Diğer bir deyişle, Z_t değişkeni arz işlevini denetim altında tutarak talep işlevini özdeşlemekte ve böylece tahmin edilebilir olmasını sağlamaktadır.

- Sonuç olarak, araç değişkenler eşanlı denklemlerdeki tek bir denkleme odaklanan kestirme bir yoldur diyebiliriz.
- Tek denklemli modellerde tüm ilişkileri açıkça modellemek gerekmiyor. Ancak, diğer denklemlerdeki değişkenlerden araç değişken olarak yararlanıyoruz.

8.2.2 Eşanlılık Yanlılığını Saptamak

- Eşanlı denklemler ya da eşanlılık sorunu yokken SEK tahmincileri yansız ve enaz varyanslıdır.
- Eşanlılık altında ise SEK tahmincileri tutarlı bile değildirler ve bu nedenle yerlerini almaşık tahmincilere bırakırlar.
- Ancak bu almaşık tahminciler eğer eşanlılık sorunu yokken kullanılacak olurlarsa enaz varyanslı olmayan tahminler üretmektedirler.
- Bu nedenle, almaşık yöntemleri kullanmak üzere SEK'ten vazgeçmeden önce örneklemde eşanlılık sorununun olup olmadığı sınanmalıdır.
- Bu doğrultuda sıklıkla kullanılan sınama ise 1978 yılında Jerry A. Hausman tarafından geliştirilen ve bir tahminciyi bir diğerine göre değerlendiren Hausman sınamasıdır.

Hausman Sınaması

Bir içtürel ve bir dıştürel değişkeni olan şu modeli ele alalım:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i' + \beta_2 X_{1i} + u_i$$

$Z_{1i}, \dots, Z_{si}$ ise araç değişkenler olsun. Hausman sınamasının eşanlılığa bakmak için kullanılabilecek basit bir şekli şöyledir:

1. Y_i''nin birtek araç değişkenlere göre aşağıdaki bağlanımı hesaplanır ve kalıntılar kaydedilir:

$$Y_i' = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 Z_{1i} + \cdots + \hat{\alpha}_s Z_{si} + \hat{v}_i$$

2. Kalıntılar özgün modele eklenir ve SEK tahmini yapılır:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i' + \beta_2 X_{1i} + \beta_3 \hat{v}_i + u_i$$

3. Eşanlılık yoksa, $\hat{v}_i$ ve u_i arasındaki ilinti de kavuşmazsal olarak sıfır olmalıdır. Bu nedenle $\hat{v}_i$'nın katsayısına bakılır. β_3 eğer t sınamasına göre anlamlı bulunursa, eşanlılık olmadığını söyleyen sıfır önsavı reddedilir.

8.3 Eşanlı Denklem Yöntemleri

8.3.1 İki Aşamalı Enküçük Kareler Tahmini

- Modelde eşanlılık yanlılığı söz konusu olduğu zaman, SEK tahminleri tutarsızdır ve bu nedenle kullanılmamalıdır.
- Eşanlı denklemleri tahmin etmeye yönelik en temel yol ise *"iki aşamalı en küçük kareler"* (two stage least squares) ya da kısaca *"2AEK"* (2SLS) yöntemidir.
- 2AEK yöntemi ile bulunan tahminler her zaman yansızlık ve enaz varyanslılık özelliklerini sağlayamayabilseler de tutarlıdırlar.
- Diğer bir deyişle, örneklem büyüdükçe yanlılık azalır ve tahminler giderek anakütledeki gerçek değere yaklaşırlar.
- Bu nedenle küçük örneklemlerde dikkatli olunmalı, 2AEK kullanılmadan önce Hausman sınaması yapılıp açıklayıcı değişkenlerin hata terimi ile ilintili olduğu doğrulanmalıdır.
-
- 2AEK bir tek denklem yöntemidir. Araç değişkenler modeli tahmininde kullanıldığı gibi, bir denklem sistemindeki tüm denklemlere ayrı ayrı da uygulanabilir.
- 2AEK yöntemini kullanabilmek için tek gerekli koşul tahmin edilecek denklemin eksik özdeşlemeli olmamasıdır.
- Baştaki gelir-para arzı modelimize geri dönelim.

$$\begin{aligned}
&\text{Gelir işlevi:} \quad && Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 M_t + \alpha_3 W_t + \alpha_4 \Pi_t + u_t \\
&\text{Para arzı işlevi:} \quad && M_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 E_t + v_t
\end{aligned}$$

- Y_t'nin gelir, M_t'nin para arzı, W_t'nin ücretler, Π_t'nin karlar, E_t'nin ise döviz kuru olduğunu anımsayalım.
- Özdeşlemede sıra kuralına göre gelir işlevinin tam, para arzı işlevinin ise aşırı özdeşlemeli olduğunu görüyoruz.
- Dolayısıyla her iki denklemi de 2AEK ile tahmin edebiliriz.

Adından anlaşılabileceği gibi, 2AEK iki ayrı SEK tahmini içeren doğrusal bir yöntemdir. Öncelikle para arzı işlevini tahmin edelim. Süreç şu şekildedir:

1. *Birinci aşama:* İçsel açıklayıcı değişken Y_t ile hata terimi v_t arasındaki ilişkiyi yok etmek için, Y_t'nin araç değişkenler ve denklemdeki dışsal değişkenlere göre bağlanımı bulunur. Örneğimizde, E_t para arzı işlevindeki dışsal değişkendir. W_t ve Π_t ise geliri açıklayan ama para arzı ile ilintisiz kabul edilen araçlardır. Buna göre aşağıdaki model hesaplanır.

   $$Y_t = \lambda_1 + \lambda_2 W_t + \lambda_3 \Pi_t + \lambda_4 E_t + e_t$$

   Yukarıdaki işlem sonrasında şu iki parça ayrıştırılmış olur:

   $$Y_t = \hat{Y}_t + e_t$$

   $\hat{Y}_t$ burada Y_t'nin önceden belirli dışsal değişkenler olan W_t, Π_t ve E_t'ye göre koşullu ortalamasıdır. Modelde içsellik sorunu olmadığı için, e_t terimi SEK varsayımlarını sağlar.

2. *İkinci aşama:* Para arzı denklemi artık aşağıdaki biçimde yazılabilir.

   $$\begin{aligned} M_t &= \gamma_1 + \gamma_2(\hat{Y}_t + e_t) + \gamma_3 E_t + w_t \\ &= \gamma_1 + \quad \gamma_2 \hat{Y}_t \quad + \gamma_3 E_t + (w_t + \gamma_2 e_t) \\ &= \gamma_1 + \quad \gamma_2 \hat{Y}_t \quad + \gamma_3 E_t + w_t^* \end{aligned}$$

   Yukarıdaki modelin baştaki para arzı işlevinden tek farkı Y_t yerine $\hat{Y}_t$'yı kullanmasıdır. Y_t ilk modeldeki hata terimi v_t ile ilintiliyken, $\hat{Y}_t$ ise w_t^* ile kavuşmazda ilintisizdir. Bu ikinci aşama bağlanımı SEK yöntemi ile bulunabilir. Elde edilecek tahminler tutarlıdır ve örneklem dağılımları da büyük örneklemlerde normal dağılıma yakınsamaktadır.

Yöntemi biraz daha açıklamak için diğer denkleme de bakalım. Modelimizdeki gelir işlevi tam özdeşlemelidir. Dolayısıyla bunu da 2AEK yöntemi ile tahmin edilebiliriz:

1. *Birinci aşama:* Bu denklemde E_t, para arzını açıkladığı ama gelir ile doğrudan ilintili olmadığı düşünülen araç değişkendir. W_t ve Π_t ise dışsal değişkenlerdir. Bu durumda birinci aşama bağlanımı aşağıdaki gibidir:

   $$M_t = \theta_1 + \theta_2 E_t + \theta_3 W_t + \theta_4 \Pi_t + \epsilon_t$$

2. *İkinci aşama:* Yukarıdaki tahminden elde edilen $\hat{M}_t$'ler kullanılarak ikinci aşama bağlanımı da şöyle yazılır:

$$\begin{aligned} Y_t &= \theta_1 + \theta_2(\hat{M}_t + \epsilon_t) + \theta_3 W_t + \theta_4 \Pi_t + \omega_t \\ &= \theta_1 + \theta_2 \hat{M}_t + \theta_3 W_t + \theta_4 \Pi_t + (\omega_t + \theta_2 \epsilon_t) \\ &= \theta_1 + \theta_2 \hat{M}_t + \theta_3 W_t + \theta_4 \Pi_t + \omega_t^* \end{aligned}$$

İkinci aşamadaki θ tahminleri kavuşmazsal olarak tutarlıdır.

2AEK Çıkarsama Sorunu

- 2AEK tahminindeki önemli bir nokta çıkarsamaya ilişkindir.
- Hata terimi ω_t^*'nin gerçekte $(\omega_t + \theta_2 \epsilon_t)$ olduğuna ve bunun varyansının da özgün modeldeki ϵ_t'nin varyansından farklı olduğuna dikkat edelim.
- Bu nedenle ikinci aşamada hesaplanan ölçünlü hatalar ve bunlara dayalı güven aralıkları, t ve F değerleri yanıltıcıdır.
- Gerekli düzeltmeyi yapmaya yönelik bir ayarlama formülü bulunmakla birlikte, bilgisayar yazılımlarındaki ilerleme bu ek işlemi ortadan kaldırmıştır.
- Gretl, 2AEK yöntemini tek bir adımda uygulamakta ve tüm istatistikleri ayarlama gerektirmeksizin bulabilmektedir.
- 2AEK terimi ise modelin gerçekten iki ayrı SEK bağlanımı ile hesaplandığı zamanlardan kalma yerleşmiş bir sözcük olarak kullanılmayı sürdürmektedir.

Sayısal Bir Örnek

- Sayısal bir örnek olarak, 1987-2006 arası Türkiye verilerini kullanalım ve para arzı işlevini 2AEK ile tahmin edelim:

$$\begin{array}{lllll} \hat{M}_t = & -82{,}8752 & +\,2{,}8635\,\hat{Y}_t & +\,49{,}4770\,E_t & \\ \text{öh} & (80{,}6982) & (0{,}9123) & (17{,}7648) & \\ z & (-1{,}0270) & (3{,}1386) & (2{,}7851) & R^2 = 0{,}7429 \end{array}$$

- Modelin SEK tahminleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{lllll} \hat{M}_t = & -96{,}5514 & +\,3{,}0196\,Y_t & +\,47{,}5508\,E_t & \\ \text{öh} & (80{,}4139) & (0{,}9091) & (17{,}7301) & \\ t & (-1{,}2007) & (3{,}3215) & (2{,}6819) & R^2 = 0{,}7433 \end{array}$$

- Sonuçlar arasında dikkate değer farklılıklar bulunmaktadır.
- Hausman sınama istatistiğine bakıldığında ise p-değerinin 0,0022 olduğu görülür.
- SEK tahminlerinin tutarlı olduğu sıfır önsavı reddedildiğine göre, 2AEK yönteminin kullanılması doğrudur.
- Son olarak, 2AEK tahmincisi büyük örneklemlerde normal dağıldığı için t yerine z değerleri verildiğine dikkat ediniz.

Diğer Eşanlı Denklem Tahmin Yöntemleri

Uygulamada eşanlı denklem modellerini tahmin etmek çeşitli durumlara dikkat gerektiren bir sürece dönüşebilmektedir. Farklı özellikler taşıyan almaşık tahmin yöntemlerinden birkaçı ise şunlardır:

- *"Üç aşamalı enküçük kareler"* (three stage least squares)
- *"Sınırlı bilgi ençok olabilirlik"* (limited information maximum likelihood)
- *"Tam bilgi ençok olabilirlik"* (Full information maximum likelihood)
- *"Görünürde ilişkisiz bağlanımlar"* (seemingly unrelated regressions)
- *"Genellemeli Beklemler Yöntemi"* (generalized method of moments)

Bu ileri yöntemler burada ele alınmayacaktır.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 18* "Simultaneous-Equation Models," *Bölüm 19* "The Identification Problem" ve *Bölüm 20* "Simultaneous-Equation Methods"okunacak.

Önümüzdeki Ders
Zaman Serileri Ekonometrisinin Temelleri

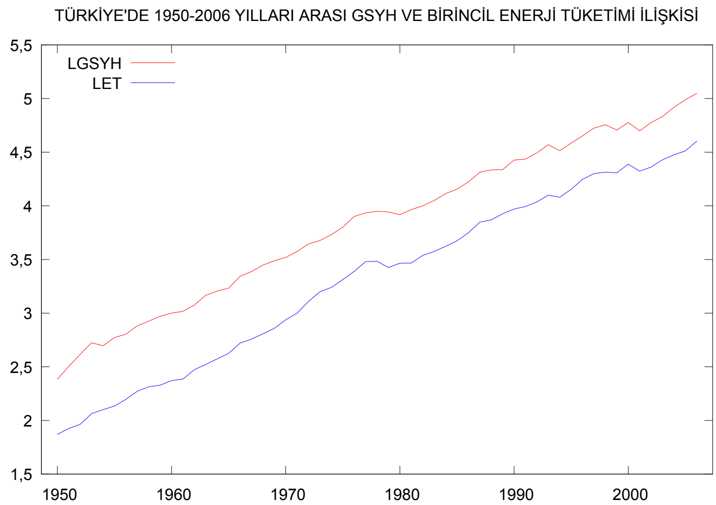
Bölüm 9

Zaman Serileri Ekonometrisine Giriş

9.1 Bazı Temel Kavramlar

- Önceki bölümlerde zaman serilerine dayanan bağlanım modellerinde verilerin *"durağan"* (stationary) olmasının önemli olduğunu söylemiştik.
- Eğer zaman serileri durağan değilse, SEK katsayı tahmin ve çıkarsama sonuçları kuşkulu duruma gelebilir.
- Bu bölümde; durağanlık kavramını anlatacak, durağanlığa ilişkin sınama yöntemlerinden söz edecek, ve durağan-dışı seriler arasında gözlenebilen ilişkileri inceleyeceğiz.
- Ayrıca, uygun dönüştürmeler ile durağanlaştırılan zaman serileri ile *"yordama"* (forecast) yapılması konusunu da ele alacağız. Bu bağlamda Box-Jenkins ve yöney özbağlanım modellerini tartışacağız.
- Konuya hızlı bir giriş yapmak amacıyla, 1950 - 2006 yılları arasında Türkiye'de milli gelir ve birincil enerji tüketimi yıllık zaman-serisi verilerini ele alalım.
- Zaman serileri çözümlemesinin ilk adımı verilerin görsel olarak incelenmesidir.
- Büyüme oranını daha iyi görmek için, genellikle serilerin doğal logaritmalarına bakmayı yeğleriz.
- 1987 fiyatlarıyla GSYH (milyon TL) doğal logaritmasını LGSYH ile gösterelim.

- Milyon ton eşdeğer petrol cinsinden birincil enerji tüketimi doğal logaritması da LET olsun.



9.1.1 Durağanlık ve Durağan-Dışılık

Olasılıksal Süreçler

- Türkiye verilerinden edindiğimiz ilk izlenim, her iki serinin dalgalanmakla birlikte genel bir artış eğiliminde olduğudur.

- Bilmek istediğimiz asıl önemli konu ise serilerin örneklem dönemi sonrasında, diğer bir deyişle gelecekte nasıl bir yön izleyeceklerididir.

- Bu soruyu yanıtlayabilmek ise bu serileri ortaya çıkaran *"veri oluşturan süreç"* (data generating process) ya da kısaca *"VOS"* (DGP) konusunu inceleyerek olur.

- Genel olarak, tüm zaman serilerinin ardında ekonomik ve politik ortamın yansıması olan bir rastsal ya da *"olasılıksal"* (stochastic) VOS yattığı varsayılır.

- Çizitte gördüğümüz türden veri setlerinin de böyle süreçlere ait gerçekleşme kümeleri oldukları düşünülür.

- Olasılıksal süreç ile ona ait gerçekleşmeler, yatay kesit verilerindeki anakütle ve örneklem kavramları gibidir.

Zaman serileri çözümlemesindeki temel süreçlerden birisi *"durağan"* (stationary) olasılıksal süreçtir.

Durağan Süreç
Ortalaması ve varyansı zaman içerisinde değişmeyen ve iki dönem arasındaki kovaryansın ise bakılan döneme değil de dönemlerin arasındaki uzaklığa bağlı olduğu süreçtir.

- Açıklamak için aşağıdaki gibi bir Y_t serisi tanımlayalım.

$$E(Y_t) = \mu$$
$$\text{var}(Y_t) = \gamma_0$$
$$\text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma_k$$

- Şimdi, başlangıç noktasını t'den $t + k$'ye kaydırdığımızı düşünelim. Eğer Y durağan ise Y_t ve Y_{t+k} serilerinin ortalama, varyans ve kovaryansları aynı olmalıdır.
- *Dikkat:* $k = 0$ olduğunda $\text{cov}(Y_t, Y_{t+0}) = \text{var}(Y_t) = \sigma^2$'dir.
- Tanımımıza göre durağan bir zaman serisi; ortalaması, varyansı ve kovaryansı zamandan bağımsız olan seridir.
- Böyle bir seri, kendi ortalaması çevresinde sabit genişlikte salınımlar gösterir. Bu özelliğe *"ortalamaya dönüş"* (mean reversion) de denir.
- Bu şekildeki durağan seriler yazında farklı adlandırmalarla karşımıza çıkabilmektedir:

"zayıf durağan" weakly stationary,
"kovaryans durağan" covariance stationary,
"ikinci-derece durağan" second-order stationary.

Beyaz Gürültü Süreci

- Ekonometrideki özel ve önemli bir durağan süreç türü, *"saf rastsal"* (pure random) ya da *"beyaz gürültü"* (white noise) adı verilen olasılıksal süreçtir.
- Bu sürecin özelliği ise sıfır ortalamalı, σ^2 sabit varyanslı ve özilintisiz olmasıdır.
- Böyle bir süreç eğer aynı zamanda bağımsız, özdeş ve normal dağılımlı ise buna da *"Gaussçu beyaz gürültü"* (Gaussian white noise) adı verilir.
- Klasik normal bağlanım modelindeki hata teriminin bu şekilde dağıldığını varsaydığımızı ve bunu da daha önce $u_i \sim \text{NBD}(0, \sigma^2)$ şeklinde gösterdiğimizi anımsayalım.

Rastsal Yürüyüş Süreci

- Durağan serilerden farklı olarak; ortalaması, varyansı ya da bunların her ikisi birden zamana bağlı olarak değişen serilere *"durağan-dışı"* (non-stationary) seri denir.

- Durağan dışılığın klasik örneği ise *"rastsal yürüyüş"* (random walk) sürecidir.

- Rastsal yürüyüş, en basit şekliyle şöyle gösterilir:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t$$

- Burada u_t beyaz gürültüdür.

- Rastsal yürüyüşün özilinti konusunda görmüş olduğumuz Markov birinci derece özbağlanımsal tasarımla yakın ilişkili olduğuna dikkat edelim:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t, \qquad -1 < \rho < 1$$

- Rastsal yürüyüşte $\rho = 1$ olduğu için, bu sürece *"birim kök"* (unit root) süreci de denilmektedir.

- Rastsal yürüyüş sürecinde u_t sarsıntıları kalıcıdır:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_0 + u_1 \\ Y_2 &= Y_1 + u_2 = Y_0 + u_1 + u_2 \\ Y_3 &= Y_2 + u_3 = Y_0 + u_1 + u_2 + u_3 \end{aligned}$$

- Kısaca, t dönemindeki değer şöyle yazılabilir:

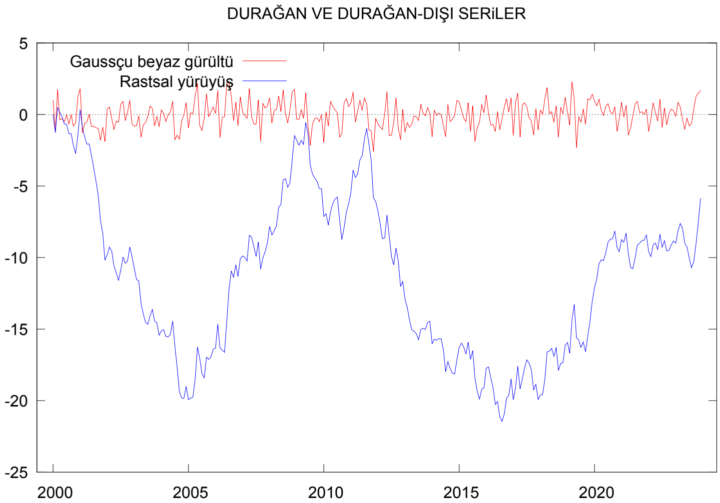
$$Y_t = Y_0 + \sum u_t$$

- Herhangi bir dönemdeki değerin daha önceki tüm rastsal sarsıntıların toplamı olmasına, rastsal yürüyüşün *"sonsuz bellek"* (infinite memory) özelliği de denir.

- $E(u_t) = 0$ olduğundan, $E(Y_t) = Y_0$ olduğuna dikkat edelim. Diğer bir deyişle Y_t'nin ortalaması sabittir.

- Öte yandan, rastsal hatalar toplandığı için, var(Y_t) sürekli artmakta ve böylece durağanlık varsayımı çiğnenmektedir.

- Y_t'nin varyansının $\text{var}(Y_t) = t\sigma^2$ olduğu gösterilebilir. Buna göre, t sonsuza giderken varyans da sonsuza gitmektedir.



9.1.2 Durağanlığı Sınamak

- Zaman serileri çözümlemesinde serilerin durağan olması önemlidir, çünkü bir seri eğer durağan değilse farklı veri setlerinde farklı görüntüler sergiler.
- Bu durumda serinin davranışı diğer dönemlere genellenemez ve geleceği tahmin etmek için yararlı olmaz.
- Durağanlık aranan bir özellik olduğuna göre, elimizdeki bir zaman serisinin durağan olup olmadığını bilmek isteriz.
- Uygulamada bir serinin durağan olup olmadığını anlamak çeşitli biçimsel ve biçimsel-dışı yöntemlere konu olur.

Özilinti İşlevi

- Durağanlığı anlamaya yönelik biçimsel-dışı bir yaklaşım çizim yöntemidir.
- Örnek olarak, Türkiye verilerine baktığımızda milli gelir ve enerji tüketimi varyanslarının 1978 öncesi ve sonrasında farklılık gösterdiği izlenimine kapılırız.
- Ancak bu şekilde kesin bir sonuca varmak zor olabilir.

- Bu noktada işimize yarayabilecek bir sınama yöntemi ise *"özilinti işlevi"* (autocorrelation function) ya da kısaca *"Öİİ"* (ACF) denilen ölçüte başvurmaktır.

- k gecikme için ρ_k ile gösterilen özilinti işlevi formülü şudur:

$$\rho_k = \frac{\text{gecikme } k \text{ iken kovaryans}}{\text{gecikme } 0 \text{ iken kovaryans}} = \frac{\gamma_k}{\sigma^2}$$

- ρ_k birimden bağımsızdır ve tüm ilinti katsayıları gibi $[-1{,}1]$ aralığında yer alır.

- Yukarıda verdiğimiz ρ_k tanımı olasılıksal sürece, diğer bir deyişle anakütleye aittir.

- Uygulamada ise yalnızca gerçekleşmeleri görebildiğimiz için örnekleme ait $\hat{\gamma}_k$ ve $\hat{\sigma}^2$ değerlerini kullanırız:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{n-k} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})^2}{n-1}$$

- Bu durumda örneklem özilinti işlevi $\hat{\rho}_k$ da şöyle olur:

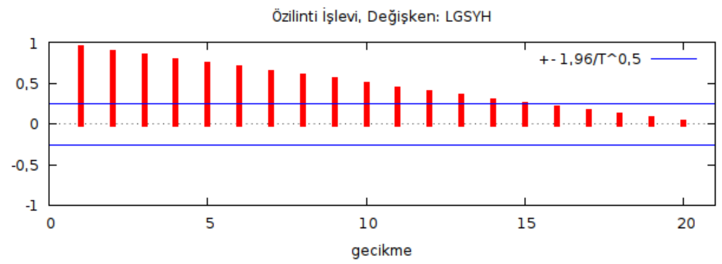
$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\sigma}^2}$$

- Öyleyse $\hat{\rho}_k$, gecikme sayısı k iken örneklem kovaryansının örneklemin varyansına oranından başka birşey değildir.

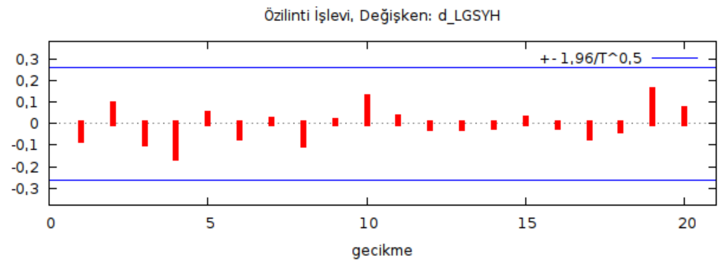
- $\hat{\rho}_k$'nın k'ye göre çizimine *"ilintiçizit"* (correlogram) denir.

- Bir serinin durağan olup olmadığını anlamanın bir yolu işte bu örneklem ilintiçizitini incelemektir.

- Örnek olarak, reel GSYH serimize ait ilintiçizit şöyledir:



- Yukarıdaki ilintiçizite bakınca, gecikme sayısı k artarken $\hat{\rho}_k$'nın düzenli olarak azaldığını ancak 10 gecikme sonra bile yüksek değerler almayı sürdürdüğünü görüyoruz.
- Bu örüntü, serinin durağan olmadığının bir göstergesidir.
- Bir $\hat{\rho}_k$'nın istatistiksel olarak sıfırdan farklı olup olmadığını anlamak için ölçünlü hatasından yararlanılır.
- İngiliz istatistikçi M. S. Bartlett, bir zaman serisi bütünüyle rastsal ise $\hat{\rho}_k$'nın da 0 ortalama ve $1/n$ varyans ile yaklaşık normal dağıldığını göstermiştir.
- Bu bilgiden ve ölçünlü normal dağılımın özelliklerinden yararlanarak herhangi bir $\hat{\rho}_k$'nın güven aralığı bulunabilir.
- Örnek olarak, LGSYH serimizde 57 gözlem olduğuna göre, örneklem varyansını $1/57 = 0{,}0175$ ve örneklem ölçünlü hatasını da $1/\sqrt{57} = 0{,}1325$ olarak hesaplarız.
- Bu durumda tahmin edilen $\hat{\rho}_k$'ların $\%95$ güven aralığını da $\pm 1{,}96(0{,}1325) = 0{,}2597$ olarak buluruz. Demek ki $\hat{\rho}_k$ $(-0{,}2597, 0{,}2597)$ aralığında ise 0 olduğu reddedilmez.
- Gretl, bu güven aralığını iki lacivert çizgi ile göstermiştir.
- Durağan-dışı serilerdeki sıfırdan anlamlı derecede büyük ve düzenli azalan özilintiler, durağan serilerde görülmez.
- Durağan bir seride tüm ilintilerin sıfıra yakın çıkması beklenir.
- Örnek olarak, durağan bir serinin ilintiçiziti şöyledir:



- Tüm $\hat{\rho}_k$'ların iki lacivert çizgi arasında yer aldığına ve dolayısıyla 0 olduklarının reddedilmediğine dikkat ediniz.

Birim Kök Sınaması

- Durağan-dışılığı sınamanın uygulamadaki en yaygın yolu, biçimsel birim kök sınamasına başvurmaktır.

- Birinci derece özbağlanımsal modeli anımsayalım:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t$$

- Eğer $\rho = 1$ ise serinin durağan-dışı olduğunu ve bu sürece de birim kök süreci dendiğini biliyoruz.

- Birim kök sınamasındaki genel düşünce ρ'nun istatistiksel olarak 1'e eşit olup olmadığını sınamaktır.

- Bu doğrultuda, elde edilecek sonuçlarının daha güvenilir olabilmesi için yukarıdaki model genellikle şöyle yazılır:

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} &= \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + u_t \\ \Delta Y_t &= (1 - \rho) Y_{t-1} + u_t \\ &= \delta Y_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

- Bu modelde $H_0 : \delta = 0$ sıfır önsavının sınanmasına *"Dickey-Fuller"* ya da kısaca *"DF"* birim kök sınaması denir.

- DF sınamasını uygulamak, olası birim kök sürecinin doğasına ilişkin bazı seçimler yapmayı gerekli kılar.

- Dolayısıyla, sınama için şu dört ayrı belirtim kullanılabilir:

Sabit terim olmadan:	$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t$
Sabit terim ile:	$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + u_t$
Sabit terim ve eğilim:	$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + u_t$
Sabit terim ve üstel eğilim:	$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \delta Y_{t-1} + u_t$

- Yukarıdaki belirtimlerden hangisinin kullanılacağına görsel inceleme sonunda karar verilir.

- Örnek olarak, seride doğrusal bir artış eğilimi gözleniyorsa sabit terim ve eğilim seçeneği kullanılır.

- DF sınamasında u_t'nin özilintisiz olduğu varsayılmaktadır.

- Bu çoğunlukla geçerli olmadığı için, yukarıda gösterdiğimiz model belirtimlerinin sonlarına ΔY_t'nin gecikmeli değerleri eklenerek sınama genişletilmiştir.
- Bu yeni sınamaya *"Genişletmeli Dickey-Fuller"* (Augmented Dickey-Fuller) ya da kısaca *"ADF"* sınaması denir.
- Örnek olarak, sabit terimsiz ADF sınama belirtimi şöyledir:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta Y_{t-i} + u_t$$

- Buradaki gecikme derecesi m genellikle Akaike gibi bilgi ölçütlerine dayanılarak, görgül olarak belirlenmektedir.

DF ve ADF sınamalarında Y_{t-1}'nin önündeki δ değiştirgesi ne yazık ki büyük örneklemlerde bile t dağılımını izlememektedir. Dickey ve Fuller, δ'nın örneklem dağılımına τ (tau) adını vermiş ve buna ait kritik değerleri Monte Carlo yöntemi ile bulmuşlardır. Dolayısıyla, ADF sınamasının adımları şöyledir:

1. Sınanacak zaman serisi incelenir ve var olduğu düşünülen olasılıksal sürece uygun sınama belirtimi seçilir.
2. Model tahmin edilir ve aşağıdaki τ istatistiği hesaplanır.

$$\tau = \frac{\hat{\delta}}{\text{öh}(\hat{\delta})}$$

3. Sıfır önsavı $H_0 : \delta = 0$ ve almaşık önsav ise $H_1 : \delta < 0$ şeklindedir. Diğer deyişle ADF tek kuyruklu bir sınamadır.
4. Hesaplanan sınama istatistiği çizelgeden bulunan kritik τ değerinden büyükse, birim kök sıfır önsavı reddedilir.

- ADF sınamasına bir açıklayıcı örnek olarak, Türkiye'de milli gelir ve birincil enerji tüketimi verilerimize dönelim.
- LGSYH ve LET'in doğrusal bir artış eğiliminde olduklarını dikkate alarak, sınamamızı sabit terim ve eğilim kullanarak yapmalıyız.
- Gecikme derecesi için ise $m = 1$ kullanalım.
- Birim kök olduğu sıfır önsavı altında, LGSYH ve LET için ADF sınama istatistikleri sırasıyla $\tau_{\text{LGSYH}} = -2{,}7858$ ve $\tau_{\text{LET}} = -1{,}6116$ olarak bulunur.

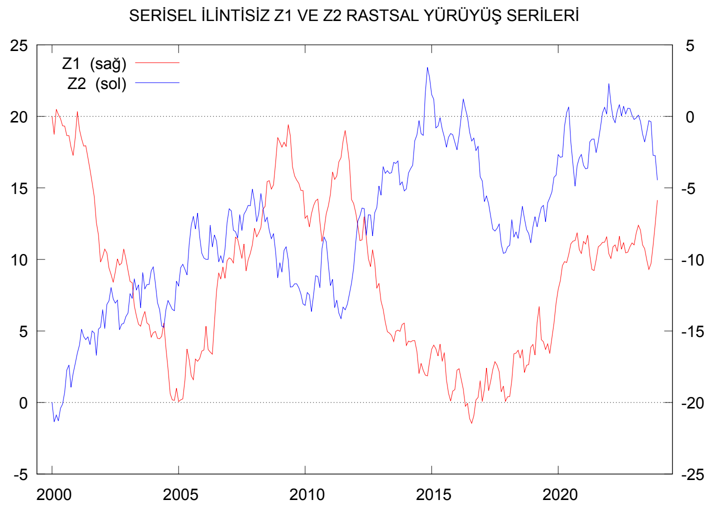
- Bu değerlere karşılık gelen kavuşmazsal p-değerleri ise 0,2025 ve 0,7888'dir.
- Buna göre milli gelir ve enerji tüketiminin logaritmalarının durağan-dışı olduğunu reddetmiyoruz.

9.1.3 Düzmece Bağlanım ve Eştümleşim

- Durağan olmayan serilere dayanan SEK katsayı tahmin ve çıkarsama sonuçlarının kuşkulu olabileceğini söylemiştik.
- Bu olguyu ayrıntılı olarak tartışabilmek için aşağıdaki iki rastsal yürüyüş serisini ele alalım.

$$\begin{aligned} Z_{1t} &= Z_{1t-1} + u_t \\ Z_{2t} &= Z_{2t-1} + v_t \end{aligned}$$

- u_t ve v_t birbirinden bağımsız ve ölçünlü normal dağılımlı hata terimleridir.
- Açıkça görüldüğü gibi Z_{1t} ve Z_{2t} durağan-dışıdırlar ve aynı zamanda da *"serisel ilintisiz"* (serially uncorrelated) serilerdir.



- Elimizdeki değişkenler ilintisiz olduğuna göre aralarında herhangi bir ilişki bulunamaması beklenir.
- Z_{1t}'nin Z_{2t}'ye göre bağlanımını hesapladığımızda ise şu şaşırtıcı sonuçlarla karşılaşırız:

$$\begin{array}{llll} \hat{Z_{1t}} = & -5{,}7310 & -\ 0{,}4519\ Z_{2t} & \\ \text{öh} & (0{,}7474) & (0{,}0553) & r^2 = 0{,}1895 \\ t & (-7{,}6682) & (-8{,}1768) & d = 0{,}0372 \end{array}$$

- Sonuçlara göre Z_{2t} istatistiksel olarak anlamlıdır ve r^2 de sıfır olması gerekirken $\%20$'ye yakın bulunmuştur.
- Durağan olmayan seriler arasında büyük örneklemlerde bile görülebilen yukarıdaki gibi bir asılsız ilişkiye *"düzmece bağlanım"* (spurious regression) adı verilir.
- Durbin-Watson d değerinin düşük çıktığına dikkat edelim.
- Granger ve Newbold'a göre $R^2 > d$ olması, tahmin edilen bağlanımın düzmece olabileceğinin iyi bir göstergesidir.
- Düzmece bağlanımdan kaçınmak için yapılması gereken şey durağan veriler ile çalışmaktır.
- Bu nedenle uygulamada durağan-dışı seriler genellikle önce farkları alınarak durağanlaştırılır ve daha sonra da bağlanım çözümlemesine geçilir.
- Ancak bu durumda ilaç hastalıktan beter olabilir çünkü farkların bağlanımını hesaplamak değişkenler arasındaki uzun dönem ilişkinin yitirilmesi demektir.
- Çoğu iktisat kuramının iki dönem arasındaki değişmeleri değil, uzun dönemli ilişkileri konu aldığını anımsayalım.
- Para arzı ile fiyatlar, kamu harcaması ile vergi gelirleri, faiz oranları ile yatırım harcamaları, kalıcı gelir ile kalıcı tüketim gibi ilişkileri genellikle düzey olarak ele almak isteriz.
- Durağan-dışı serilerin düzeyleri ile çalışabilme gereksinimi, ekonometricileri yeni yöntemler geliştirmeye yöneltmiştir.

Eştümleşim

- Türkiye'de gayrisafi yurtiçi hasıla ve birincil enerji tüketimi örneğimize geri dönelim.
- İki serinin de durağan-dışı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bunlara dayalı bir bağlanım düzmece sonuçlar verme riski taşımaktadır.
- Öte yandan, görsel olarak incelediğimizde LGSYH ile LET arasındaki ilişkinin Z_{1t} ile Z_{2t} arasındaki düzmece ilişkiden farklı olduğu izlenimine kapılırız.

- Z_{1t} ve Z_{2t}'den farklı olarak, LGSYH ve LET durağan dışı bir davranış göstermekte ancak bu davranışlarını birlikte ve bir uyum içerisinde sürdürmektedirler.
- Bu birçok iktisadi zaman serisinde görülebilen bir özelliktir.
- 1987 tarihli ortak çalışmalarında, Nobel ödüllü iki iktisatçı Clive Granger ve Robert Engle bu olguyu çözümlemiş ve *"eştümleşim"* (cointegration) olarak adlandırmışlardır.

- Milli gelir ve enerji tüketimine ilişkin şu modeli ele alalım:

$$\text{LGSYH}_t = \beta_1 + \beta_2 \text{LET}_t + \epsilon_t$$

- Yukarıdaki bağlanımı tahmin ettiğimizi ve birim kök sınaması sonucunda ϵ_t'nin durağan çıktığını düşünelim.
- ϵ_t'yi şöyle de yazabildiğimize dikkat ediniz:

$$\epsilon_t = \text{LGSYH}_t - \beta_1 - \beta_2 \text{LET}_t$$

- Demek ki elimizdeki iki seri tekil olarak durağan-dışı ya da $I(1)$ olurken, bunların doğrusal bir birleşimi durağan ya da $I(0)$ olabilmektedir.
- Kısaca durağan-dışı eğilimler birbirini götürmekte, böylece değişkenler uzun dönemli bir denge ilişkisi sergilemektedir.
- Bu durumda LGSYH_t ve LET_t eştümleşik seriler olurlar.
- Ayrıca, en üstteki bağlanıma *"eştümleyen bağlanım"* (cointegrating regression), β_2'ye de *"eştümleyen değiştirge"* (cointegrating parameter) adı verilir.

Eştümleşimi Saptamak

- Eştümleşimin yararı, bu durumda bağlanımın düzmece olmaması ve SEK tahmin ve çıkarsama sonuçlarının geçerliliğini korumasıdır.
- Demek ki eştümleşik serileri fark almadan kullanabiliriz ve böylece değişkenler arasındaki uzun dönem ilişki bilgisini de yitirmeyiz.
- Bunu yapabilmek için ise ilk önce eştümleşimin var olup olmadığını sınamalıyız.

- Bu amaç için sıklıkla kullanılan bir yöntem, Johansen ve Juselius'un 1990 yılında önerdiği eştümleşim sınamasıdır.
- Burada bizim tartışabileceğimiz daha basit bir yaklaşım ise bağlanım kalıntıları üzerinde birim kök sınaması yapmaya dayanan Engle-Granger sınamasıdır.

Engle-Granger eştümleşim sınamasının adımları aşağıdaki gibidir:

1. Değişkenlerin durağan-dışı olduklarını doğrulamak için, önce değişkenler üzerinde tek tek ADF sınaması yapılır.
2. Bağlanım modeli tahmin edilir ve kalıntılar saklanır.
3. Kalıntılar üzerinde de ADF birim kök sınaması uygulanır.
4. Tüm tekil değişkenler için birim kök önsavı reddedilmezken eştümleyen bağlanım kalıntıları için birim kök sıfır önsavı reddedilirse, eştümleşim için elde delil var demektir.

- Açıklayıcı bir örnek olarak, Türkiye'deki milli gelir ve enerji tüketimi serilerimize dönelim.
- LGSYH ve LEC'nin tekil olarak durağan-dışı olduğunu bularak, birinci adımı daha önceden tamamlamıştık.
- Elimizdeki bağlanım modeli kalıntılarına ADF sınaması yaptığımızda ise p-değeri 0,0125 çıkmakta ve böylece kalıntılar için birim kök önsavı reddedilmektedir.
- Öyleyse Engel-Granger sınamasına dayanarak serilerin eştümleşik olduğunu reddetmiyoruz.

Hata Düzeltme Modeli

- LGSYH ve LEC'nin eştümleşik olması demek, bu serilerin kısa dönemde olasılıksal uyumsuzluklar gösterebilecekleri ancak uzun dönemde hep bir denge ilişkisine dönecekleri anlamına gelir.
- Bu ilişkiyi incelemek için uygun yöntem ise *"hata düzeltme düzeneği"* (error correction mechanism) ya da kısaca *"HDD"* (ECM) denilen yaklaşımdır.
- Hata düzeltme modeli, milli gelir ve enerji örneğimizdeki eştümleyen bağlanıma ait ϵ_t hatalarından şöyle yararlanır:

$$\Delta\text{LGSYH}_t = \beta_1 + \beta_2\Delta\text{LET}_t + \beta_3\epsilon_{t-1} + u_t$$

- Buradaki ϵ_{t-1} terimi ΔLGSYH ve ΔLET arasındaki ilişkinin uzun dönem dengesinden ne kadar uzakta olduğunu ölçer.
- Eksi değerli olması beklenen β_3 ise uzun dönem denge ilişkisinde geçici bir sapma olduğunda dengeye ne kadar çabuk geri dönüleceğini gösterir.

9.2 Box-Jenkins Yöntemi

- Ekonometrik çözümlemenin belki de en önemli amacı değişkenlerin gelecek değerlerini tahmin etmek, diğer bir deyişle *"yordama"* (forecasting) yapmaktır.
- Durağan zaman serilerini modellemenin yaygın yollarından biri ise *"özbağlanımsal tümleşik hareketli ortalama"* (autoregressive integrated moving average) ya da kısaca *ARIMA* yöntemidir.
- George Box ve Gwilym Jenkins tarafından geliştirilen bu yaklaşıma Box-Jenkins (BJ) yöntemi de denilmektedir.
- Box-Jenkins yönteminin temel vurgusu, zaman serilerini yalnızca kendi geçmiş değerleri ve olasılıksal hata terimi ile açıklamaktır.
- Herhangi bir iktisat kuramına dayanmayan ve "bırakın da veriler kendi adlarına konuşsun" mantığı ile oluşturulan bu modellere *"kuramsız"* (atheoric) modeller de denir.

Özbağlanımsal Süreç

- Tüm zaman serilerinin ardında bir veri oluşturan süreç yattığı varsayımımızı anımsayalım.
- Örnek olarak, bu süreç daha önce özilinti konusunda görmüş olduğumuz birinci derece *"özbağlanımsal tasarım"* (autoregressive scheme) AR(1) olabilir:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + u_t$$

- Bu tasarıma göre Y'nin t dönemindeki değeri, bir önceki dönemdeki değer ve rastsal hata terimine bağlıdır.
- Genel olarak, p'inci derece özbağlanımsal süreç, ya da kısaca AR(p) şöyle gösterilir:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \cdots + \alpha_p Y_{t-p} + u_t$$

- Modelde Y'nin şimdiki ve gecikmeli değerlerinden başka değişken olmadığına dikkat ediniz. İşte "veriler kendi adlarına konuşsun" diyerek anlatılmak istenen budur.

Hareketli Ortalama Süreci

- Bir zaman serisini oluşturabilecek tek tasarım özbağlanımsal süreç değildir.
- Şimdi de Y'nin şöyle modellenebildiğini düşünelim:

$$Y_t = \mu + u_t + \beta_1 u_{t-1}$$

- Burada Y'nin şimdiki değeri sabit terim artı iki dönemlik hataların ağırlıklı toplamına eşittir.
- Bu tasarıma birinci derece *"hareketli ortalama"* (moving average) süreci denir ve MA(1) ile gösterilir.
- q'ıncı derece hareketli ortalama süreci MA(q)'nun genel gösterimi ise şöyledir:

$$Y_t = \mu + u_t + \beta_1 u_{t-1} + \cdots + \beta_q u_{t-q}$$

- Demek ki MA süreci sabit sayıda beyaz gürültü hataların zaman içinde hareket eden bir doğrusal birleşimidir.

Özbağlanımsal Hareketli Ortalama Süreci

- Bir zaman serisi hem özbağlanım hem hareketli ortalama özelliklerini de taşıyabilir.
- Bu tasarıma ise *"özbağlanımsal hareketli ortalama"* (autoregressive moving average), kısaca ARMA denir.
- Örnek olarak, hem Y'nin hem de u'nun bir önceki değerlerini içeren ARMA(1,1) süreci şu şekildedir:

$$Y_t = \theta + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t + \beta_1 u_{t-1}$$

- Genel olarak ARMA(p,q) da şöyle gösterilir:

$$Y_t = \theta + \alpha_1 Y_{t-1} + \cdots + \alpha_p Y_{t-p} + u_t + \beta_1 u_{t-1} + \cdots + \beta_q u_{t-q}$$

- Yukarıdaki modelde p özbağlanım ve q hareketli ortalama olmak üzere toplam $p + q$ terim bulunmaktadır.

Özbağlanımsal Tümleşik Hareketli Ortalama Süreci

- Yukarıda gösterdiğimiz AR(p), MA(q) ve ARMA(p,q) tasarımları zaman serisinin durağan olduğu varsayımına dayanmaktadır.
- Çoğu iktisadi serinin ise durağan-dışı, diğer bir deyişle tümleşik olduğunu biliyoruz.
- Birinci derece tümleşik, ya da kısaca I(1) olan bir serinin birinci farkının durağan I(0) serisi olduğunu anımsayalım.
- Benzer şekilde I(2) olan bir zaman serisi de iki kez farkı alındığında I(0) olur.
- Genel olarak I(d) olan bir zaman serisinin d kez farkı alındığında durağanlaştığını ve bu serinin daha sonra ARMA(p,q) süreci ile modellenebildiğini düşünelim.
- İşte bu tasarıma da *"özbağlanımsal tümleşik hareketli ortalama"* (autoregressive integrated moving average) süreci denir ve ARIMA(p,d,q) ile gösterilir.

Box-Jenkins Yönteminin Adımları

- ARIMA(p,d,q) sürecinin AR(p), MA(q) ve ARMA(p,q) süreçlerini kapsayıcı olduğuna dikkat ediniz.
- Örnek olarak, bir ARMA(1,1) modeli ARIMA(1,0,1) şeklinde ve bir MA(2) modeli de ARIMA(0,0,2) şeklinde yazılabilir.
- Demek ki farklı zaman serilerini anlatmak için p, d ve q değerlerini bilmek yeterli olabilmektedir.
- Box-Jenkins yönteminin yararı bu noktadadır.
- BJ'nin hedefi, çeşitli zaman serilerini tanımlayan p, d, q değiştirgelerini bulmayı ve daha sonra bu serileri yordama amacıyla tahmin etmeyi kolaylaştırıcı bir yöntem sunmaktır.

Box-Jenkins yöntemi şu dört adımdan oluşmaktadır:

1. *Özdeşleme:* Zaman serisine ait p, d, q değerleri bulunur.
2. *Tahmin:* Veriler belirlenen modele yakıştırılır.
3. *Tanısal denetim:* Verilerin modele yeterli derecede yakışıp yakışmadığı incelenir ve gerekli ise başa dönülerek yeni değiştirge değerleri seçilir. BJ yinelemesel bir yöntemdir.

4. *Yordama:* Yeterli olduğuna karar verilen model, serinin örneklem dışı değerlerini kestirmek amacıyla kullanılır.

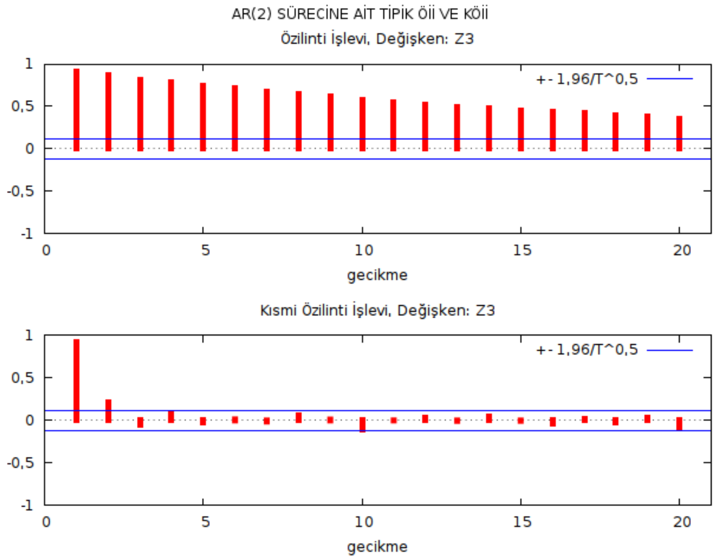
Özdeşleme

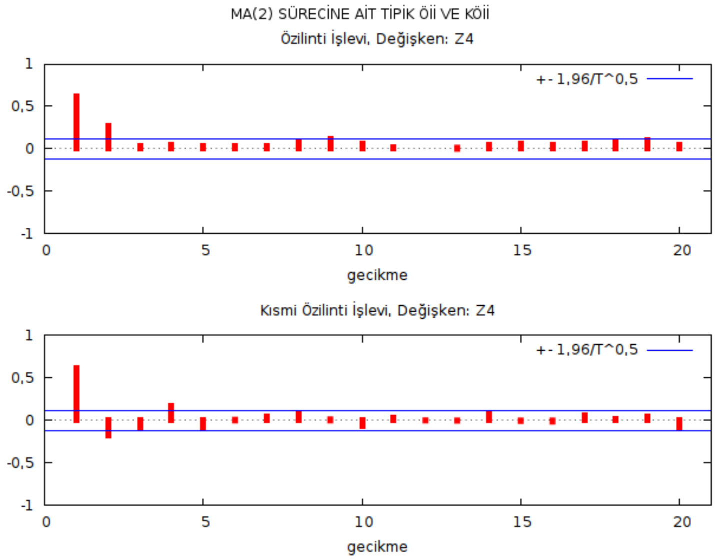
- BJ yönteminde özdeşlemeye ilk önce d değiştirgesinden başlanır ve serinin durağan olup olmadığına bakılır.
- Bu amaçla, daha önce göstermiş olduğumuz gibi ilitiçizit incelenir ya da biçimsel birim kök sınamaları yapılır.
- Seri eğer durağan değilse farkı alınır ve durağanlık tekrar sınanır.
- Yukarıdaki işlem, seri durağanlaşıncaya kadar yinelenir.
- Seri d kez farkı alınarak durağanlaştırıldıktan sonra sıra p ve q değerlerini bulmaya gelir.
- Bunun yolu ise seriye ait ilintiçiziti incelemektir.
- İlintiçizitte bulunan özilinti işlevi ya da kısaca ÖİI'yi daha önce durağanlığın sınanması bağlamında ele almıştık.
- İlintiçizitte yer alan ve BJ yönteminde önemli yeri olan bir ikinci unsur ise *"kısmi özilinti işlevi"* (partial autocorrelation function) ya da kısaca *"KÖİİ"* (PACF) olmaktadır.
- KÖİİ, ρ_{kk} diye gösterilir ve ÖİI'ye benzer şekilde birbirinden k gecikme uzaklıktaki gözlemler arasındaki ilintiyi ölçer.
- Öte yandan KÖİİ, ÖİI'den farklı olarak, k'ye kadar olan ara gecikmeleri denetler ya da diğer deyişle sabit tutar.
- İlintiçizit, artan k değerlerine karşılık gelen KÖİİ'yi vererek özbağlanımsal bir süreçteki gecikme uzunluğu p'yi bulmaya yardımcı olur.
- AR(p), MA(q) ve ARMA(p,q) süreçlerinin kendilerine özgü aşağıdaki ÖİI ve KÖİİ örüntülerini verdikleri bilinmektedir:

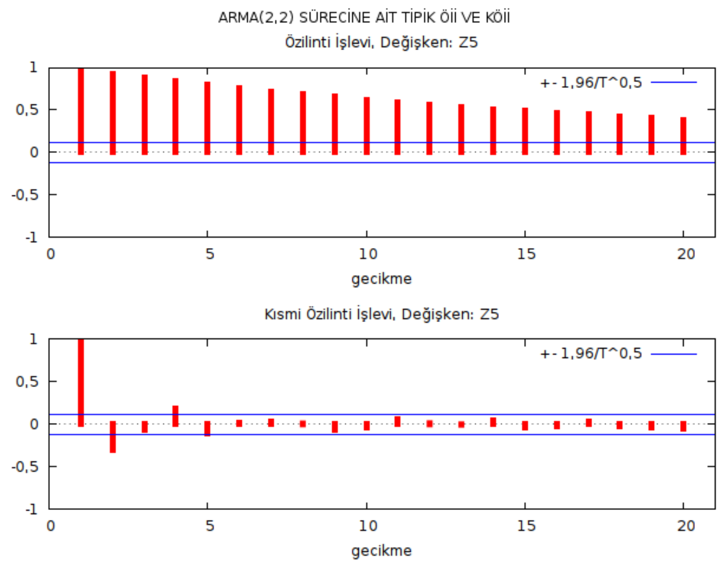
Çizelge: Kuramsal ÖİI ve KÖİİ Örüntüleri

Model	ÖİI Örüntüsü	KÖİİ Örüntüsü
AR(p)	Üstel azalma, azalan sinüs dalgası ya da ikisi birden	p gecikmeye kadar sivrilik
MA(q)	q gecikmeye kadar sivrilik	Üstel azalma
ARMA(p,q)	Üstel azalma	Üstel azalma

- Yukarıdaki ana çizgilerden de yararlanılarak uygun p ve q değerleri seçilir.







Tahmin

- p, d ve q değerleri belirlendikten sonra, Box-Jenkins yöntemindeki ikinci aşama modelin tahmin edilmesidir.
- Bu işlem belli durumlarda SEK yöntemi ile yapılabilse de uygulamada genellikle ençok olabilirlik gibi daha ileri tahmin yöntemleri yeğlenmektedir.
- Gretl gibi ekonometri yazılımları tarafından kolayca yapılan bu hesaplamaların ayrıntılarına burada girmiyoruz.

Tanısal Denetim

- Belli bir ARIMA modeli tahmin edildikten sonraki adım verilerin modele ne derece yakıştığını incelemektir.
- Basit bir tanısal denetim aracı, kalıntılara ait ÖİI ve KÖİI çizitlerine bakmak ve kalıntıların beyaz gürültü olup olmadığına karar vermektir.
- Bu noktada ayrıca daha önce tartıştığımız AIC, BIC, ve HQC gibi yakışmanın iyiliği ölçütleri de değerlendirilir.
- Tanısal denetimin önemi; farklı p, d, q'lar kullanılarak birbirine yakın yakışmalar elde edilebileceğindendir.
- ARIMA modellemesinin yinelemeli bir süreç olduğu ve deneyimle kazanılan bir ustalık istediği unutulmamalıdır.

Yordama

- İyi bir yakışma gözleniyor ve başka bir model aramaya gerek olmadığı düşünülüyorsa, eldeki model son olarak yordama amacıyla kullanılabilir.
- Verilerin eğer başta farkı alındıysa, önce bu işlem tersine çevrilir. Diğer bir deyişle seriye *"tümlev"* (integral) alma işlemi uygulanır.
- Daha sonra verilerin eldeki geçmiş değerleri formülde yerine koyularak *"bir-adım-ileri yordama"* (one-step-ahead forecast) elde edilir.
- Bu işlemin tekrarlanması ile ikinci ve daha sonraki gelecek dönemlere ait *"çokdönemli yordama"* (multiperiod forecast) değerleri ve bunların ölçünlü hataları da bulunabilir.
- ARIMA yönteminin yaygın olmasının bir nedeni özellikle de kısa dönem yordamalarındaki yüksek başarım düzeyidir.

9.3 Yöney Özbağlanım Modeli

- Bazı değişkenlerin içtürel ve bazı değişkenlerin de dıştürel olarak ele alındığı eşanlı denklem modellerini daha önce incelemiştik.
- Bu modellerdeki değişken seçimi sonucunda ortaya çıkan denklemlerin eksik, tam ya da aşırı özdeşlemeli olabildiğini anımsayalım.
- Eşanlı denklem modellerinin belirtim sürecindeki öznellik, Christopher Sims tarafından güçlü bir şekilde eleştirilmiştir.
- Sims'e göre zaman serisi verilerinde eşanlılık varsa bunlar içtürel-dıştürel ayrımı yapmadan eşit olarak ele alınmalıdır.
- Bu düşünce ile Sims *"yöney özbağlanım modeli"* (vector autoregression model) ya da kısaca *VAR* yaklaşımını geliştirmiştir.
- VAR'ın özelliği, tekdeğişkenli özbağlanım modelini birden çok zaman serisi içeren bir seriler yöneyine genellemesidir.
- k değişkenli bir VAR modelinde herbir değişkenin sırayla bağımlı değişken olduğu k sayıda denklem olur. Her bir denklemdeki gecikme sayısı da p'ye eşittir.
- k değişkenli ve p gecikmeli böyle bir denklem sistemine VAR(p) denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
Y_{1t} & = & \alpha_{10} & + & \sum_{j=1}^{p} \beta_{1p} Y_{1t-p} & + & \ldots & + & \sum_{j=1}^{p} \lambda_{1p} Y_{kt-p} & + & u_{1t} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Y_{kt} & = & \alpha_{k0} & + & \sum_{j=1}^{p} \beta_{kp} Y_{1t-p} & + & \ldots & + & \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kp} Y_{kt-p} & + & u_{kt}
\end{array}
$$

Yöney Özbağlanım Açıklayıcı Örnek

- Yöntemi açıklamak için, Türkiye'ye ait LGSYH ve LET verilerimize dönelim. Gecikme düzeyi şimdilik $p = 4$ olsun.

- Düzmece bağlanımdan kaçınmak için serilerin farkını kullanacak olursak, iki değişkenli VAR(4) modeli şöyle olur:

$$\begin{aligned}
\Delta\text{LGSYH}_t &= \alpha_{10} + \sum_{j=1}^{4} \beta_{1j}\Delta\text{LGSYH}_{t-j} + \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j}\Delta\text{LET}_{t-j} + u_{1t} \\
\Delta\text{LET}_t &= \alpha_{20} + \sum_{j=1}^{4} \beta_{2j}\Delta\text{LGSYH}_{t-j} + \sum_{j=1}^{4} \gamma_{2j}\Delta\text{LET}_{t-j} + u_{2t}
\end{aligned}$$

- Görüldüğü gibi modelimizde iki denklem bulunmaktadır.
- İki denklemde de yalnızca ΔLGSYH ve ΔLET'in 1'den 4'e kadar olan gecikmeleri açıklayıcı olarak yer almaktadır.
- Her denklemde sabit terim ile birlikte toplam 9 terim vardır.
- VAR varsayımları altında yukarıdaki model SEK ile tahmin edilebilir, alışık olduğumuz sınama süreçleri uygulanabilir.
- Türkiye örneğimizi tahmin edince şu bulgunlara ulaşıyoruz:

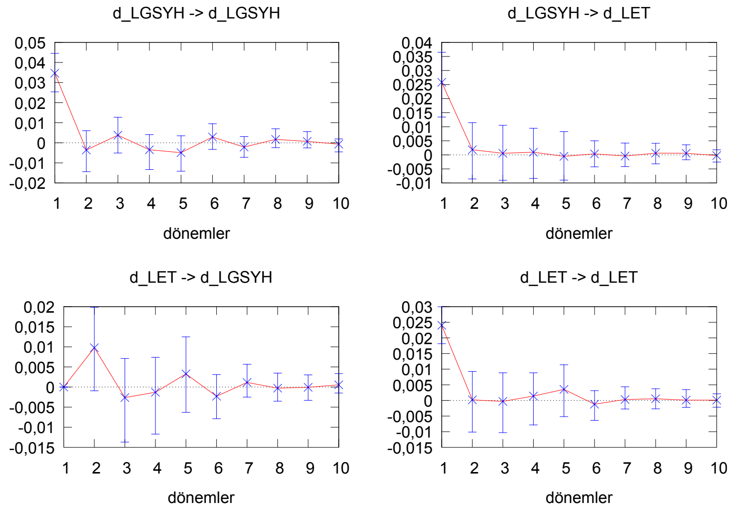
	ΔLGSYH		ΔLET	
Değişken	Katsayı	t-oranı	Katsayı	t-oranı
Sabit	0,05263	3,4539 ***	0,0420	2,7119 ***
ΔLGSYH_{t-1}	−0,4066	−1,9582 *	0,0467	0,2209
ΔLGSYH_{t-2}	0,00641	0,02859	0,0442	0,1936
ΔLGSYH_{t-3}	0,0083	0,04100	−0,0057	−0,0276
ΔLGSYH_{t-4}	−0,2549	−1,4687	−0,1340	−0,7588
ΔLET_{t-1}	0,4070	1,9008 *	0,0081	0,0371
ΔLET_{t-2}	0,0530	0,2288	−0,0317	−0,1344
ΔLET_{t-3}	−0,0960	−0,4443	0,0459	0,2089
ΔLET_{t-4}	0,0895	0,4481	0,1553	0,7640
R^2	0,1610		0,0212	
d	1,9093		1,9307	

- Tahmin sonuçlarına göre, GSYH'deki değişimi açıklamada ΔLGSYH_{t-1} ve ΔLET_{t-1} ($\alpha = 0.1$ düzeyinde) etkilidir.
- LET'deki değişim ise bu iki değişkenin önceki değerleri ile istatistiksel olarak anlamlı derecede açıklanamamaktadır.

- VAR modellerinde çıkarsamaya ilişkin bir özellik, birden çok denklemi kapsayan birleşik önsavların sınanabilmesidir.
- Örnek olarak, modelimizde doğru gecikme düzeyinin 4 mü yoksa 3 mü olduğunu ΔLGSYH_{t-4} ve ΔLET_{t-4}'lerin her iki denklemde de aynı anda 0 olduğunu sınayarak bulabiliriz.
- $H_0 : \Delta\text{LGSYH}_{1,t-4} = \Delta\text{LET}_{1,t-4} = \Delta\text{LGSYH}_{2,t-4} = \Delta\text{LET}_{2,t-4} = 0$ önsavına ilişkin χ^2 istatistiğinin p-değeri 0,2735'dir. Öyleyse gecikme derecesi $p = 3$ reddedilmez.
- VAR tahmininde gecikme derecesinin ne olacağını bulmak için yukarıdaki gibi F sınamalarının yanında AIC, BIC, HQC gibi yakışmanın iyiliği ölçütleri de sıkça kullanılır.

Yöney Özbağlanım Dürtüye Tepkiler İşlevi

- VAR modellerinde, bir değişkenin gecikmelerine ait birden fazla katsayıyı aynı anda yorumlamak güç olabilmektedir.
- Bu zorluğa karşı geliştirilmiş etkili bir yaklaşım ise *"dürtüye tepki işlevi"* (impulse response function) hesaplamasıdır.
- Bu yöntem ile denklemlerdeki hata terimlerinde bir ölçünlü sapmalık sarsıntılar yaratılır ve değişkenlerin tepkilerinin zaman içindeki değişimi bulunarak çizit üzerinde incelenir.
- İlk denklemdeki u_{1t}'nin bir ös arttığını düşünelim.
- Modeldeki gecikme terimlerinden dolayı, böyle bir sarsıntı ΔLGSYH'nin hem şimdiki hem de gelecek dönemlerde alacağı değerleri etkileyecektir.
- Ayrıca ΔLGSYH'nin gecikmeleri ikinci denklemde de yer aldığı için ΔLET de benzer şekilde değişecektir.
- Dürtüye tepki işlevi bu değişimleri hesaplayarak bir görsel çözümleme aracı biçiminde değerlendirmemize sunar.



Yöney Özbağlanım Modeline İlişkin Bazı Konular

VAR yönteminin başlıca üstünlükleri şunlardır:

1. İçtürel ve dıştürel değişken ayrımı olmadığı için yöntemi uygulamak son derece kolaydır.
2. SEK yöntemi kullanılabildiği için tahmin ve çıkarsama da basittir.
3. Çoğu zaman görece karmaşık eşanlı modellere göre daha başarılı yordama sonuçları elde edilebilmektedir.

Diğer yandan şu sorunlara da dikkat edilmelidir:

1. VAR modeli de BJ yöntemi gibi kuramdan bağımsızdır.
2. Tüm değişkenler ve gecikmeleri her denklemde yer aldığı için çok sayıda serbestlik derecesi kaybı söz konusudur.
3. Gecikme derecesi seçimi sonuçları değiştirebilmektedir.
4. Durağanlık zorunlu olduğu için fark alınması gereken ve gerekmeyen verilerle birlikte çalışmak güç olabilmektedir.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev

Kitaptan *Bölüm 21* “Time Series Econometrics: Some Basic Concepts” ve *Bölüm 22* “Time Series Econometrics: Forecasting” okunacak.